תורת המספרים האלגברית (88798) תשפ"א
תרגיל 10

1. יהי K שדה הנזלי, L/K הרחבה אלגברית, ויהיו k,ℓ שדות השאריות של K,L. הוכח שקיימת תת־הרחבה יחידה L_0/K של L/K שהיא מקסימלית בין כל התת־הרחבות הלא־מסועפות, וששדה השאריות של L_0 הינו הסגור הספרבילי של k בתוך ℓ.

2. יהי K שדה הנזלי עם הערכה בדידה, ונניח ששדה השאריות k הינו סופי. יהי $\overline{K}$ סגור אלגברי של K. לכל $n \in \mathbb{N}$, הוכח שיש תת־הרחבה יחידה K_n/K של $\overline{K}/K$ כך ש־ K_n/K לא מסועפת ממעלה n.

3. בתרגיל הזה נפגוש את הוקטורים של ויט (Witt vectors). ניתן לראות בשאלה האחרונה של תרגיל 8 מקור להשראה מסוימת.

   (א) יהי p ראשוני ויהיו $X_0, X_1, \dots$ משתנים. לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר

   $$W_n(X_0, \dots, X_n) = X_0^{p^n} + pX_1^{p^{n-1}} + \cdots + p^n X_n.$$

   הוכח שקיימים פולינימים $S_0, S_1, \dots, P_0, P_1, \dots \in \mathbb{Z}[X_i, Y_i]_{i \geq 0}$ כך שלכל $n \geq 0$ מתקיים

   $$\begin{aligned} W_n(S_0, \dots, S_n) &= W_n(X_0, \dots, X_n) + W_n(Y_0, \dots, Y_n) \\ W_n(P_0, \dots, P_n) &= W_n(X_0, \dots, X_n) W_n(Y_0, \dots, Y_n). \end{aligned}$$

   (ב) יהי A חוג חילופי כלשהו. תהי $W(A)$ הקבוצה $A^{\mathbb{N}} = \{a = (a_0, a_1, a_2, \dots) : a_i \in A\}$, עם הפעולות

   $$\begin{aligned} a + b &= (S_0(a,b), S_1(a,b), \dots) \\ ab &= (P_0(a,b), P_1(a,b), \dots). \end{aligned}$$

   הוכח כי $W(A)$ הינו חוג חילופי. הוא נקרא החוג של הוקטורים של ויט של A.

   (ג) עכשיו נניח כי $p\alpha = 0$ לכל $\alpha \in A$. לכל $a = (a_0, a_1, a_2, \dots) \in W(A)$ ולכל n נגדיר $a^{(n)} = W_n(a) = a_0^{p^n} + pa_1^{p^{n-1}} + \cdots + p^n a_n$.
   נתבונן בהעתקות $V, F : W(A) \to W(A)$ המוגדרות על ידי

   $$\begin{aligned} V(a) &= (0, a_0, a_1, \dots) \\ F(a) &= (a_0^p, a_1^p, \dots). \end{aligned}$$

   ההעתקה F נקראת ההעתקה של פרובניוס, ואילו V הינה העתקת ההעברה – בגרמנית Verschiebung, לכן הסימון V הסטנדרטי. הוכח את הזהויות הבאות:

   $$\begin{aligned} (V(a))^{(n)} &= pa^{(n-1)} \\ a^{(n)} &= (F(a))^{(n-1)} + p^n a_n. \end{aligned}$$

(ד) יהי k שדה ממאפיין $\operatorname{char} k = p$. הוכח כי $F : W(k) \to W(k)$ הינו אנדומורפיזם של חוגים, ואילו $V : W(k) \to W(k)$ אנדומורפיזם של חבורות אבליות, כלומר מכבד חיבור אך לא כפל. הוכח בנוסף כי $F(V(a)) = V(F(a)) = pa$ לכל $a \in W(k)$.

הכוונה ל־ pa הינו $a + a + \cdots a$, p פעמים.

(ה) נניח כי k שדה מושלם ממאפיין p, כלומר שההומומורפיזם של פרובניוס $\varphi : k \to k$ המוגדר על ידי $\varphi(x) = x^p$ הינו אוטומורפיזם. במקרה הזה, הוכח כי $W(k)$ הינו חוג הערכה בדידה עם שדה שאריות k, וכי $W(k)$ שלם לטופולוגיה ה־$\mathfrak{m}$־אדית, כאשר $\mathfrak{m} \triangleleft W(k)$ הינו האידאל המקסימלי.

(ו) יהי $f \geq 1$, ויהי $\mathbb{Q}_{p^f}$ ההרחבה הלא־מסועפת של $\mathbb{Q}_p$ ממעלה $f = [\mathbb{Q}_{p^f} : \mathbb{Q}_p]$. בגלל השאלה הקודמת, זה לגיטימי להגדיר אותו בהא הידיעה. יהי $\mathbb{Z}_{p^f}$ חוג ההערכה של $\mathbb{Q}_{p^f}$. הוכח כי $\mathbb{Z}_{p^f} \simeq W(\mathbb{F}_{p^f})$.

רמז: לכל $\lambda \in \mathbb{F}_{p^f}$, יהי $[\lambda] \in \mathbb{Z}_{p^f}$ הנציג הקנוני, כלומר שורש $(p^f - 1)$־י של 1 שמרים של λ. ניתן לרשום כל איבר של $a = \mathbb{Z}_{p^f}$ באופן יחיד בצורה $a = \sum_{n=0}^{\infty} p^n [a_n]$.

4. יהי K שדה p־ אדי, כלומר הרחבה סופית $K/\mathbb{Q}_p$. יהי $\mathcal{O}$ חוג ההערכה של K, ויהי $\mathfrak{p}$ האידאל המקסימלי של $\mathcal{O}$. הוכח שיש הומומורפיזם רציף יחיד $\log : K^\times \to K$ עם התכונות $\log p = 0$ וגם $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$ לכל $x \in \mathfrak{p}$.