תרגול 5

1. תהי f פונקציה מדידה לבג. הראו כי קיימת פונקציה מדידה בורל g כך ש $g = f$ כמעט בכל מקום.

פתרון: ראינו כי אם f מדידה לבג אזי קיימת סדרה של פונקציות פשוטות f_n כך ש $f_n \to f$. נסמן $f_n = \sum_{i=1}^{n} c_n 1_{A_i^n}$ כאשר c_n מספרים ממשיים ו A_n קבוצות מדידות לבג. למדנו שהאיפיון של קבוצות לבג הוא שניתן למצוא לכל קבוצה מדידה לבג A קבוצה מדידה בורל E (G_δ) כך ש $E = A \cup F$, $m(F) = 0$ ו $F \cap A = \varnothing$. מכאן שנוכל למצוא לכל A_i^n קבוצה מדידה בורל E_i^n כך ש $E_i^n = A_i^n \cup F_i^n$, $m(F_i^n) = 0$ ו $F_i^n \cap A_i^n = \varnothing$.כעת נגדיר את הפונקציה הפשוטה $g_n = \sum_{i=1}^{n} d_n 1_{E_i^n}$. מההגדרה של E_i^n פונקציה זו מדידה בורל. כעת נגדיר את הקבוצה $B = \{x : \lim g_n(x) \neq f(x)\}$, ונשים לב כי אם $f_n(x) = g_n(x)$ לכל n אז $x \in B^c$ מכאן ש $B \subseteq B' = \{x : \exists n,\ f_n(x) \neq g_n(x)\}$. נשים לב כי $B' \subseteq B'' = \bigcup_{i,n} F_i^n$, מכאן ש $m(B) \leq m(B') \leq m(B'') \leq m\left(\bigcup_{i,n} F_i^n\right) \leq \sum_{i,n} m(F_i^n) = 0$. נגדיר את הפונקציה g ע"י $\overline{\lim} g_n(x) = g(x)$ ונובע ש g הינה מדידה בורל שכן g_n הינן כאלו. כמו כן, קל לראות כי $g = f$ כב"מ מכאן ש g הינה הפונקציה הדרושה.

2. תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ מדידה לבג ואינטגרבילית. אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת פונקציה רציפה $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ אשר מתאפסת מחוץ לקבוצה חסומה ו $\int |f - g| dm < \varepsilon$.

פתרון: נוכיח זאת בכמה שלבים:

א. אם $-\infty < a < b < \infty$ אזי לכל $\delta \in \left(0, \frac{b-a}{2}\right)$ נסתכל על הפונקציות $\tau_{a,b,\delta}$ אשר מקבלות 1 על $x \in (a+\delta, b-\delta)$, 0 מחוץ לקטע (a,b) ולינאריות $[a, a+\delta]$ ו $[b-\delta, b]$. ברור כי לכל קטע (a,b) נוכל לבחור קטע $(a+\delta, b-\delta)$ כך ש $m((a,b) \setminus (a+\delta, b-\delta)) < \varepsilon$. מכאן ש $\int |\tau_{a,b,\delta} - 1_{(a,b)}| dm < \varepsilon$.

ב. ראינו בהרצאה כי אם E מדידה לבג ו $m(E)<\infty$ אז ניתן למצוא קטעים זרים ופתוחים $I_1, I_2, ..., I_l$ כך ש $m\left(E\Delta\bigcup_{i=1}^{l} I_i\right)<\frac{\varepsilon}{2}$. מכאן ש $\int\left|\sum_{i=1}^{l}1_{I_i}-1_E\right|dm<\frac{\varepsilon}{2}$. מצד שני עפ"י משראינו נובע כי ניתן לבחור δ כזאת כך ש $\int\left|\tau_{I_i,\delta}-1_{I_i}\right|dm<\frac{\varepsilon}{2l}$ ומכאן ש $\int\left|\sum_{i=1}^{l}\tau_{I_i,\delta}-\sum_{i=1}^{l}1_{I_i}\right|dm<\sum_{i=1}^{l}\frac{\varepsilon}{2l}=\frac{\varepsilon}{2}$. ועכשיו, אם נסמן $\psi=\sum_{i=1}^{l}\tau_{I_i,\delta}$, נובע כי $\int\left|\psi-1_E\right|dm<\varepsilon$.

ג. למדנו כי אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ אינטגרבילית אז קיימת פונקציה $\varphi=\sum_{i=1}^{N}c_k I_{E_i}$ פשוטה ואינטגרבילית כך ש $\int\left|\varphi-f\right|dm<\frac{\varepsilon}{2}$. מהעובדה כי φ אינטגרבילית נובע כי $m(E_i)<\infty$ לכל i . עפ"י שלב ב נוכל למצוא פונקציה ψ_j רציפה כך ש $\int\left|\psi_j-1_{E_j}\right|dm<\frac{\varepsilon}{2N\left|c_j\right|}$. נסמן $\psi=\sum_{i=1}^{l}c_j\psi_j$ וקיבלנו

$$\int|\psi-f|\,dm=\int|\phi-\psi|\,dm+\int|f-\phi|\,dm$$

$$\leq\sum_{j=1}^{N}\int\left|c_j\psi_j-c_j1_{E_j}\right|dm+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\leq\sum_{j=1}^{N}\left|c_j\right|\frac{\varepsilon}{2N\left|c_j\right|}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$