

מועד ב' חשבון אינפיניטסימלי 132 – 89, תשפ"א

מרצים: אלעד עטייא, ד"ר ארז שיינר.
מתרגלים: אמונה ליפסקר, עקיבה מלכה, אלעד עטייא, ניקול צאירי,
אושרית שטוסל.

הוראות:

- משך הבחינה: שעתיים.
- כל חומר עזר אסור בשימוש, למעט מחשבון פשוט.
- כל שאלה שווה 27 נקודות, שאלה מיטיבה שווה 2 נקודות.
- בשאלות ה"רגילות" **נמקו כל צעד**. בשאלות המיטיבות תשובה סופית תספיק.

שאלה 1:

הוכיחו שלכל $x > 0$ מתקיים:

$$\frac{\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\ln(x+1)} > \frac{x+1}{2x^2+2x+1}$$

שאלה 2:

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

א. (14 נק') תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה, ונניח ש- f רציפה בכל הממשיים. אזי, למשוואה $f(x) = x$ יש פתרון אם ורק אם למשוואה $f(f(x)) = x$ יש פתרון.

ב. (13 נק') תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה, ונניח ש- f רציפה בכל הרציונליים. אזי, קיימת פונקציה $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ הרציפה בכל הממשיים ומקיימת את התנאי: $g(x) = f(x)$ לכל $x \in \mathbb{Q}$.

שאלה 3:

א. (14 נק') בדקו האם הטור הבא מתכנס: $\sum (\sqrt[n]{n} - 1)$. הוכיחו את תשובתכם.

ב. (13 נק') חשבו את הגבול: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x^x} - 1 \right)$. נמקו כל צעד.

שאלה 4:

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

א. (14 נק') תהי a_n סדרה. נניח שלכל תת-סדרה קיימת תת-סדרה המתכנסת ל- L . אזי, $a_n \rightarrow L$.

ב. (13 נק') הסדרה $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n}$ מתכנסת.

שאלות מיטיבות:

5. חשבו את הגבול: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{n} + \sin \frac{1}{n^2} \right)^{n^2}$.

6. חשבו את סכום הטור: $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{4}{(n+5)(n+6)} - \frac{2^{2n}}{3 \cdot 7^n} \right)$

7. חשבו את $f'(x)$, כאשר: $f(x) = x^{\arctan(x^{\arctan x})}$

8. קבעו עבור אלו ערכים של a לפונקציה: $f(x) = ax^3 + 4ax^2 + 8x$ יש שתי נקודות קיצון מקומיות.