תרגיל 7 אינפי 2 מדמ"ח

שאלה 1

קבעו לגבי האינטגרלים הבאים האם הם מתכנסים בהחלט, מתכנסים בתנאי או מתבדרים.

1. $\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2}\cos x \ dx$
2. $\int_2^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}-1} \ dx$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\cos x}\sin\left(\tan x\right) \ dx$
4. $\int_1^\infty \cos\left(x^2+1\right) \ dx$
5. $\int_0^\infty \frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} \ dx$

פתרון:

1. נוכיח כי האינטגרל מתכנס בהחלט.

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2}\cos x\right| \ dx \le \int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2} \ dx = \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2} \ dx + \int_1^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2} \ dx$$

האינטגרל $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2} \ dx$ הוא אינטגרל של פונקציה חסומה בקטע סופי ולכן מתכנס. לכן נותר להראות כי $\int_1^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2} \ dx$ מתכנס.
נשים לב כי $\frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2} \le \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}$, וכיוון ש $\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}} \ dx$ הוא אינטגרל מתכנס, נקבל לפי מבחן ההשוואה כי גם האינטגרל שלנו מתכנס, ולכן בסה"כ האינטגרל מתכנס בהחלט.

2. נשים לב כי תנאי מבחן דריכלה מתקיימים: $\frac{1}{\sqrt{x}-1}$ היא פונקציה מונוטונית ושואפת לאפס כאשר x שואף לאינסוף.
בנוסף, כפי שהראנו בתרגול, $\int_2^\infty \sin x \ dx$ הוא אינטגרל חסום, ולכן האינטגרל מתכנס לפי דריכלה.
נותר לבדוק התכנסות בהחלט, כלומר את התכנסות האינטגרל $\int_2^\infty \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}-1} \ dx$.
בתחום $x > 2$ האינטגרל חיובי, ולכן ניתן להשתמש במבחן ההשוואה.

$$0 \le |\sin x| \le 1 \implies \sin^2 x \le |\sin x| \implies \int_2^\infty \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}-1} \ dx \ge \int_2^\infty \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}-1} \ dx$$

לכן, מספיק להראות כי האינטגרל $\int_2^\infty \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}-1} \ dx$ מתבדר, ואז נוכיח כי האינטגרל שלנו מתכנס בתנאי.
ואכן, נשתמש בזהות $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$ ונקבל:

$$\int_2^\infty \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}-1} \ dx = \frac{1}{2}\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}-1} \ dx - \frac{1}{2}\int_2^\infty \frac{\cos 2x}{\sqrt{x}-1}$$

האינטגרל $\frac{1}{2}\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}-1} \ dx$ מתבדר לפי מבחן ההשוואה הגבולי עם $\frac{1}{\sqrt{x}}$, והאינטגרל $\frac{1}{2}\int_2^\infty \frac{\cos 2x}{\sqrt{x}-1}$ מתכנס לפי דריכלה, לכן בסה"כ הוכחנו כי האינטגל מתבדר

תשובה סופית: מתכנס בתנאי.

3. נציב

$$t=\tan x\implies dt=\frac{dx}{\cos^2 x}$$

מצד שני, ההצבה גם נותנת:

$$\arctan t=x\implies \frac{dt}{1+t^2}=dx$$

משתי המשוואות נקבל $1+t^2=\frac{1}{\cos^2 x}$ ולכן:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\cos x}\sin\left(\tan x\right)\ dx=\int_0^{\infty}\frac{\arctan t}{\sqrt{1+t^2}}\sin\left(t\right)\ dt$$

נסמן: $f\left(t\right)=\sin t$, $g\left(t\right)=\frac{\arctan t}{\sqrt{1+t^2}}$.

האינטגרל על $f\left(t\right)$ חסום.

$\lim_{t\to\infty}g\left(t\right)=\lim_{t\to\infty}\frac{\arctan t}{\sqrt{1+t^2}}=0$, וכן $g\left(t\right)$ פונקציה מונוטונית יורדת החל ממקום מסויים, כיוון שהנגזרת

$$g'\left(t\right)=\frac{\frac{1}{1+t^2}\sqrt{1+t^2}-\arctan t\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{t^2+1}=\frac{1-t\arctan t}{\left(t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

שלילית החל מ t_0 כלשהו.

לכן, תנאי מבחן דריכלה מתקיימים, והאינטגל מתכנס לפי דריכלה.

כעת נבדוק התכנסות בהחלט, כלומר את התכנסות האינטגרל $\int_0^{\infty}\frac{\arctan t}{\sqrt{1+t^2}}\left|\sin\left(t\right)\right|\ dt$.

$$\int_0^{\infty}\frac{\arctan t}{\sqrt{1+t^2}}\left|\sin\left(t\right)\right|\ dt=\int_0^{1}\frac{\arctan t}{\sqrt{1+t^2}}\left|\sin\left(t\right)\right|\ dt+\int_1^{\infty}\frac{\arctan t}{\sqrt{1+t^2}}\left|\sin\left(t\right)\right|\ dt$$

האינטגרל הראשון הוא על קטע סופי ופונקציה חסומה ולכן מתכנס. עבור התכנסות האינטגרל השני נבצע מבחן השוואה גבולי עם $\frac{|\sin t|}{t}$:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\arctan t\left|\sin\left(t\right)\right|t}{\sqrt{1+t^2}\left|\sin\left(t\right)\right|}=\frac{\pi}{2}\lim_{t\to\infty}\frac{t}{t\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}=\frac{\pi}{2}$$

וכיוון שהאינטגרל $\int_1^{\infty}\frac{|\sin t|}{t}\ dt$ מתבדר, נקבל כי האינטגרל $\int_1^{\infty}\frac{\arctan t}{\sqrt{1+t^2}}\left|\sin\left(t\right)\right|\ dt$ מתבדר ולכן האינטגרל בשאלה מתכנס בתנאי.

4.

$$\int_1^{\infty}\cos\left(x^2+1\right)\ dx=\begin{cases}t=x^2+1\\ dt=2xdx\\ x=\sqrt{t-1}\end{cases}=\frac{1}{2}\int_2^{\infty}\frac{\cos\left(t\right)}{\sqrt{t-1}}\ dt$$

התנאים של מבחן דריכלה מתקיימים לכן האינטגרל מתכנס.

עבור התכנסות בהחלט, נבצע מבחן השוואה גבולי עם $\frac{|\cos(t)|}{\sqrt{t}}$ונקבל שהאינטגרל מתכנס בתנאי.

5. זה ואינטגרל חיובי, ולכן אם הוא מתכנס, הוא מתכנס בהחלט. כעת, יש נקודה בעייתית ב$x=0$ ובכך שהקטע אינסופי. לכן:

$$\int_0^{\infty}\frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}\ dx=\int_0^{1}\frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}\ dx+\int_1^{\infty}\frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}\ dx$$

כיוון שהפונקציה חיובית ניתן להשתמש במבחני השוואה.

עבור האיטגרל הראשון נבצע מבחן השוואה : $\frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} < \frac{\pi}{2\sqrt{x}}$

וכיוון שהאינטגרל $\frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ מתכנס, נקבל כי גם $\int_0^1 \frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}\,dx$ מתכנס.

עבור האינטגרל השני נבצע מבחן השוואה גבולי עם $\frac{1}{x\sqrt{x}}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+1}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-1}{1+x^2}}{\frac{-1}{x^2}}=1$$

וכייון שהאינטגרל $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}$ מתכנס, נקבל שהאינטגרל שבשאלה מתכנס.

שאלה 2

קבעו לאיזה ערכי α האינטגרלים הבאים מתכנסים בהחלט ולאילו ערכי α הם מתכנסים בתנאי.

1. $\int_0^\infty \frac{\sin\left(x^2\right)}{x^\alpha}\,dx$
2. $\int_0^\infty \frac{\ln(x+1)}{x^\alpha}\sin x\,dx$

פתרון:

1. נשים לב כי יש 2 נקודות בעייתיות: ב $x=0$ ובכך שהקטע אינסופי, לכן נצטרך לחלק את האינטגרל ולטפל בכל חלק בנפרד:

$$\int_0^\infty \frac{\sin\left(x^2\right)}{x^\alpha}\,dx=\int_0^1 \frac{\sin\left(x^2\right)}{x^\alpha}\,dx+\int_1^\infty \frac{\sin\left(x^2\right)}{x^\alpha}\,dx$$

עבור האינטגרל הראשון נשים לב כי מדובר בפונקציה אי־שלילית, ולכן ניתן להשתמש במבחן ההשוואה.

כיוון ש: $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}=1$ האינטגרלים $\int_0^1 \frac{\sin\left(x^2\right)}{x^\alpha}\,dx$, $\int_0^1 \frac{x^2}{x^\alpha}\,dx=\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-2}}\,dx$ מתכנסים ומתבדרים ביחד, והאינטגרל האחרון מתכנס אמ"מ $\alpha-2<1$ כלומר החלק הראשון מתכנס אמ"מ $\alpha<3$.

נחקור את האינטגרל השני $\int_1^\infty \frac{\sin\left(x^2\right)}{x^\alpha}\,dx$:

$$\int_1^\infty \frac{\sin\left(x^2\right)}{x^\alpha}\,dx=\left\{t=x^2\right\}=\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\sin(t)}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}\,dt$$

נבדוק התכנסות בהחלט, כלומר את התכנסות האינטגרל $\int_1^\infty \frac{|\sin(t)|}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}\,dt$. עבור $\frac{\alpha+1}{2}\leq 1$ ניתן להשתמש במבחן ההשוואה: $\frac{|\sin(t)|}{t}\leq\frac{|\sin(t)|}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}$ וכבר ראינו כי אינטגרל זה מתבדר. לכן, עבור $\alpha\leq 1$ אין התכנסות בהחלט.

אם $\frac{\alpha+1}{2}>1$ אז שוב לפי מבחן ההשוואה $\frac{|\sin(t)|}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}\leq\frac{1}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}$ ואינטגרל זה מתכנס, ולכן עבור $\alpha>1$ יש התכנסות בהחלט.

כעת נבדוק מתי האינטגרל מתכנס בתנאי:

אם $0<\frac{\alpha+1}{2}\leq 1$ אז האינטגרל מתכנס לפי דריכלה.

ולכן האינטגרל $\int_1^\infty \frac{\sin\left(x^2\right)}{x^\alpha}\,dx$ מתכנס בתנאי עבור $-1<\alpha\leq 1$ ועבור $\alpha>1$ האינטגרל מתכנס בהחלט.

לסיכום: האינטגרל שבשאלה מתכנס בתנאי עבור $-1<\alpha\leq 1$, ומתכנס בהחלט עבור $1<\alpha<3$.

2. נשים לב כי יש 2 נקודות בעייתיות: ב $x=0$ ובכך שהקטע אינסופי, לכן נצטרך לחלק את האינטגרל ולטפל בכל חלק בנפרד:

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x+1)}{x^\alpha}\sin x\,dx=\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^\alpha}\sin x\,dx+\int_1^\infty \frac{\ln(x+1)}{x^\alpha}\sin x\,dx$$

נחקור את האינטגרל הראשון:

נשים לב כי עבור $x \in [0,1]$ הפונקציה אי שלילית, ולכן ניתן להשתמש במבחן ההשוואה הגבולי.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

ולכן האינטגרל מתכנס ומתבדר ביחד עם האינטגרל $\int_0^\infty \frac{1}{x^{\alpha-2}}\ dx$. אינטגרל זה מתכנס אמ"מ $\alpha<3$, לכן האינטגרל $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^\alpha}\sin x\ dx$ מתכנס עבור $\alpha<3$, ומתבדר עבור $\alpha\geq 3$.

נחקור את האינטגרל השני:

נוכיח כי האינטגרל מתכנס לכל $\alpha>0$ לפי דריכלה.

האינטגרל על $\sin x$ חסום. נסמן $g(x)=\frac{\ln(x+1)}{x^\alpha}$. $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$, ונותר לבדוק האם $g(x)$ מונוטונית יורדת.

$$g'(x)=\frac{\frac{x^\alpha}{x+1}-\alpha x^{\alpha-1}\ln(x+1)}{x^{2\alpha}}=\frac{\frac{x}{x+1}-\alpha\ln(x+1)}{x^{\alpha+1}}<0$$

החל מ x_0 מסויים, ולכן החל מx_0 זה הפונקציה מונוטונית יורדת.

כעת נבדוק התכנסות בהחלט, כלומר את התכנסות האינטגרל $\int_1^\infty \frac{\ln(x+1)}{x^\alpha}|\sin x|\ dx$.

אם $\alpha>1$ אזי $\frac{\ln(x+1)}{x^\alpha}|\sin x|\leq\frac{\ln(x+1)}{x^\alpha}$, בנוסף, האינטגרלים $\int_1^\infty \frac{\ln(x+1)}{x^\alpha}\ dx$ ו$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^\alpha}\ dx$ מתכנסים ומתבדרים ביחד לפי מבחן ההשוואה. ולבסוף נבדוק התכנסות של

$$\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^\alpha}\ dx=\{t=\ln(x)\}=\int_1^\infty \frac{t}{e^{(\alpha-1)t}}\ dx$$

קל לראות כי $\frac{t}{e^{(\alpha-1)t}}<\frac{1}{t^2}$ (כי $\alpha-1>0$), ולכן לפי מבחן ההשוואה האינטגרל $\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^\alpha}\ dx$ מתכנס, כלומר האינטגרל $\int_1^\infty \frac{\ln(x+1)}{x^\alpha}\sin x\ dx$מתכנס בהחלט עבור $\alpha>1$.

אם $0<\alpha\leq 1$, אזי $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\ dx<\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^\alpha}\ dx<\int_1^\infty \frac{\ln(1+x)|\sin x|}{x^\alpha}\ dx$ והאינטגרל השמאלי מתבדר, ולכן גם האינטגרל הימני מתבדר, ובסה"כ מתכנס בתנאי עבור $0<\alpha\leq 1$.

לסיכום: האינטגרל שבשאלה מתכנס בתנאי עבור $0<\alpha\leq 1$, ומתכנס בהחלט עבור $1<\alpha<3$.

שאלה 3

השתמשו במבחן האינטגרל על מנת לקבוע את התכנסות/התבדרות הטורים הבאים:

1. $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}$
2. $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}}$
3. $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sqrt{n}}{2^{n}\sqrt{n}}$

פתרון:

שלושת הטורים הם טורים חיוביים, והפונקציות המתאימות הם מונוטוניות יורדות, ולכן האינטגרלים מתכנסים או מתבדרים ביחד עם האינטגרלים המתאימים:

1. האינטגרל המתאים:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}=\lim_{R\to\infty}\ln(\ln(\ln x))\,|_1^R=\infty$$

ולכן הטור מתבדר.

2. האינטגרל המתאים:

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}} = -e^{-\sqrt{x}}|_{1}^{\infty} = e^{-1} < \infty$$

ולכן הטור גם מתכנס.

3. האינטגרל המתאים:

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{2^{x\sqrt{x}}} = -\frac{2}{3}2^{-x^{1.5}}|_{1}^{\infty} < \infty$$

ולכן הטור גם מתכנס.