תרגול 8 - התפלגות נורמלית רב מימדית - תשע"ט

28 באפריל 2019

- **הגדרה - משתנה מקרי n מימדי**

  - יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהיו $X_k:\Omega\to\mathbb{R}$ $(k\in\{1,...,n\})$ פונקציות ממשיות על Ω. נגדיר $\forall_{\omega\in\Omega}\overrightarrow{X}(\omega)=(X_1,...,X_n)(\omega)=(X_1(\omega),...,X_n(\omega))$ ונקבל פונקציה וקטורית $\overrightarrow{X}:\Omega\to\mathbb{R}^n$.
  - כאשר $\overrightarrow{X}:(\Omega,\mathcal{F})\to(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ מדידה. אזי $\overrightarrow{X}$ נקרא מ"מ n מימדי על $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ או "וקטור מקרי n מימדי" על מרחב ההסתברות.
  - $\overrightarrow{X}:(\Omega,\mathcal{F})\to(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ הוא משתנה מקרי n מימדי על $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ אם ורק אם $\forall_{B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}:\overrightarrow{X}^{-1}(B)=\{\omega\in\Omega\,|\,\overrightarrow{X}(\omega)\in B\}\in\mathcal{F}$.
  - **טענה**

    * $(X_1,...,X_n):(\Omega,\mathcal{F})\to(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ הוא מ"מ n מימדי על $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ אם ורק אם $\forall_{k\in\{1,2,...,n\}}X_k:(\Omega,\mathcal{F})\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ הוא משתנה מקרי על $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$.

  - **טענה**

    * נזכר כי $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)=\sigma(\{(-\infty,a]\,|\,a\in\mathbb{R}^n\})$ ומכיוון שבכדי להוכיח כ פונקציה היא מדידה, מספיק להראות תנאי מתאים על היוצרים. נביט על הטענה הבאה:

      · $\overrightarrow{X}:(\Omega,\mathcal{F})\to(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ משתנה מקרי n מימדי אם ורק אם $\forall_{\overrightarrow{a}=(a_1,...,a_n)\in\mathbb{R}^n}\{\omega\in\Omega\,|\,\overrightarrow{X}(\omega)\le\overrightarrow{a}\}=\{\omega\in\Omega\,|\,X_1(\omega)\le a_1,...,X_n(\omega)\le a_n\}\in\mathcal{F}$

- **דוגמא**

נגדיר מרחב הסתברות $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ באופן הבא:

* $\Omega=\{(x,y)\,:\,x^2+y^2\leq 1\}$ (עיגול היחידה)
* $\mathcal{F}=\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\cap 2^{\Omega}$. ($\mathcal{F}$ σ־אלגברה. הוכח!)
* $\mathbb{P}:\mathcal{F}\to\mathbb{R}^2$ המוגדר $\forall_{A\in\mathcal{F}}\mathbb{P}(A)=\frac{S(A)}{\pi}$ ו־ $S(A)=\#Area\,Of\,A$ ($\mathbb{P}$ מידת הסתברות על $\mathcal{F}$. הוכח!)
* לכל $(x,y)\in\Omega$ נגדיר את המשתנים המקריים $X,Y\,:\,\Omega\to\mathbb{R}$ באופן הבא: $X(x,y)=x$, $Y(x,y)=y$.
* אזי $(X,Y):\Omega\to\mathbb{R}^2$ משתנה מקרי דו מימדי כי

.

$$\forall_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\{(x,y)\in\Omega\,|\,X((x,y))\leq a,\,Y((x,y))\leq b\}=$$

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x\leq a,\,y\leq b\}\cap\Omega=(-\infty,a]\times(-\infty,b]\cap\Omega\in\mathcal{F}$$

- **משתנה מקרי נורמלי n מימדי**

- **הגדרה (1־מימדי)**

* וקטור המשתנים המקריים X מתפלג נורמלית אם:

$$f_X(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sigma^2}}\cdot e^{-\frac{1}{2}(t-\mu)\cdot(\sigma^2)^{-1}\cdot(t-\mu)}$$

כאשר $\mathbb{E}[X]=\mu$ ו־ $var[X]=\sigma^2$

- **הגדרה (2־מימדי)**

* וקטור המשתנים המקריים $\overrightarrow{X}=(X_1,X_2)$ מתפלג נורמלית אם:

$$f_{\overrightarrow{X}}(\overrightarrow{t})=f_{(X_1,X_2)}(t_1,t_2)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{det(\Sigma)}}\cdot exp(-\frac{1}{2}\cdot Q)$$

$$Q=\begin{bmatrix}t_1-\mathbb{E}[X_1] & t_2-\mathbb{E}[X_2]\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}Var(X_1) & Cov(X_1,X_2)\\ Cov(X_2,X_1) & Var(X_2)\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}t_1-\mathbb{E}[X_1]\\ t_2-\mathbb{E}[X_2]\end{bmatrix}$$

$$\Sigma=\begin{bmatrix}Var(X_1) & Cov(X_1,X_2)\\ Cov(X_2,X_1) & Var(X_2)\end{bmatrix}$$

- **הגדרה (n מימדי)**

  * וקטור המשתנים המקריים $\overrightarrow{X}=(X_1,...,X_n)$ מתפלג נורמלית אם פונקצית הצפיפות:

$$f_{\overrightarrow{X}}(\overrightarrow{t})=f_{\overrightarrow{X}}((t_1,...,t_n))=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{det(\Sigma)}}\cdot exp(-\frac{1}{2}(\overrightarrow{t}-\overrightarrow{\mu})^T(\Sigma^{-1})(\overrightarrow{t}-\overrightarrow{\mu}))$$

כאשר

$$\overrightarrow{\mu}=(\mathbb{E}[X_1],...,\mathbb{E}[X_n])$$

$$(\Sigma)_{i,j\in\{1,2,...,n\}}=Cov(X_i,X_j)$$

(Σ מטריצה סימטרית וחיובית לחלוטין מדרגה n, כלומר $det(\Sigma)\neq 0$.
אם $det(\Sigma)=0$ אין להתפלגות הנורמלית הרב מימדית פונקציית צפיפות).

  * במקרה ומטריצת השונויות Σ איננה הפיכה. מתקבל "משתנה מקרי רב־נורמלי סינגולרי" ונגדיר את המשתנה המקרי באמצעות הפונקציה האופיינית התקפה גם למקרה זה.

- **<u>טענה</u>** - וקטור $\overrightarrow{X}=(X_1,...,X_n)$ מתפלג נורמלית (רב מימדי) אם ורק אם כל צירוף לינארי של איבריו מתפלג נורמלית.

- **<u>תרגיל</u>**

  * יהיו $\{X_i\}_{i\in\{1,...,n\}}$ משתנים מקריים בלתי תלויים המקיימים $\forall_i X_i\sim N(0,1)$.

    · האם הוקטור המקרי $\overrightarrow{X}=(X_1,...,X_n)$ מתפלג נורמלית?

    · האם ל־ $\overrightarrow{X}$ יש פונקציית צפיפות? אם כן, חשבו את פונקציית הצפיפות של $\overrightarrow{X}$.

  * **פתרון**

· כדי לקבוע אם $\overrightarrow{X}$ מתפלג נורמלית מספיק לחשב את הפונקציה יוצרת המומנטים של $\overrightarrow{X}$ (או את הפונקציה האופיינית), מכיוון שזאת קובעת באופן יחיד את ההתפלגות :

$$\mathbb{E}[e^{\overrightarrow{t}\cdot\overrightarrow{X}}]=\mathbb{E}[e^{\overrightarrow{t}\cdot\overrightarrow{X}}]\overset{independence}{=}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}[e^{t_iX_i}]=\prod_{i=1}^{n}e^{\frac{1}{2}\cdot t_i^2}=e^{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot t_i^2}=e^{\frac{1}{2}||\overrightarrow{t}||^2}$$

· $\Sigma=I_n$ מטריצה סימטרית. חיובית לחלוטין (מטריצה A היא חיובית לחלוטין אם כל המינורים הראשיים שלה חיוביים) ו־ $det(\Sigma)=1\neq 0$.
לכן, קיימת ל־$\overrightarrow{X}$ פונקציית צפיפות. ועל פי הנוסחה מקיימת:

$$f_{\overrightarrow{X}}(\overrightarrow{t})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{det(\Sigma)}}\cdot exp(-\frac{1}{2}(\overrightarrow{t}-\overrightarrow{\mu})^T(\Sigma^{-1})(\overrightarrow{t}-\overrightarrow{\mu}))$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\cdot exp(-\frac{1}{2}(\overrightarrow{t})^T(I_n)(\overrightarrow{t}))$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\cdot exp(-\frac{1}{2}||\overrightarrow{t}||^2)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\cdot e^{-\frac{1}{2}||\overrightarrow{t}||^2}$$

– **תרגיל (החלפת משתנים ופונקציית צפיפות)**

* אם $\overrightarrow{X}\sim N(0,I_n)$ (נורמלי סטנדרטי) אזי לכל מטריצה אורתוגונלית A (מטריצה ריבועית ממשית המקיימת $AA^T=A^TA=I_n$) עבורה $\overrightarrow{W}=A\overrightarrow{X}$ מתקיים $\overrightarrow{W}\sim N(0,I_n)$.
* **פתרון**

נבצע החלפת משתנים באופן הבא־ יהי A מטריצה אורתוגונלית. אזי $\overrightarrow{t(s)}=g(\overrightarrow{s})=A\overrightarrow{s}$. מטריצה אורתוגונלית היא הפיכה ולכן, מתקיים $A^T\overrightarrow{t(s)}=\overrightarrow{s}=A^{-1}\overrightarrow{t(s)}$כלומר, $\overrightarrow{g}^{-1}(\overrightarrow{s})=A^T\overrightarrow{s}$. ואז $J(s)=\frac{\overrightarrow{g(s)}}{d\overrightarrow{s}}(s)=A^T$. מתכונת מטריצות אורתוגונליות מתקיים $|J(s)|=|\frac{\overrightarrow{g(s)}}{d\overrightarrow{s}}(s)|=|A^T|\in\{1,-1\}$. לכן, עד כדי סימן:

$$\int_B f_W(\overrightarrow{t})d\overrightarrow{t}=\int_{\overrightarrow{g}^{-1}(B)}f_W(\overrightarrow{g(s)})\cdot|J(s)|d\overrightarrow{s}=\int_{\overrightarrow{g}^{-1}(B)}f_W(\overrightarrow{t(s)})d\overrightarrow{s}$$

עתה, מכיוון ש־ $\overrightarrow{W}=A\overrightarrow{X}$ואז

$$\mathbb{E}[e^{\overrightarrow{t}\cdot\overrightarrow{W}}]=\mathbb{E}[e^{(A\overrightarrow{s})\cdot(A\overrightarrow{X})}]=\mathbb{E}[e^{\overrightarrow{s}\cdot\overrightarrow{X}}]$$

הקובע ביחידות את פונקציית ההתפלגות המצטברת, ובהתאמה את פונקציית הצפיפות (ע"י גזירה). לכן: .

$$\int\limits_{B} f_W(\overrightarrow{t})d\overrightarrow{t} = \int\limits_{\overrightarrow{g}^{-1}(B)} f_W(\overrightarrow{t(s)})d\overrightarrow{s} = \int\limits_{\overrightarrow{g}^{-1}(B)} f_X(\overrightarrow{t(s)})d\overrightarrow{s} =$$

$$\int\limits_{\overrightarrow{g}^{-1}(B)} e^{-\frac{1}{2}\cdot||A^T\overrightarrow{s}||^2}d\overrightarrow{s} = \int\limits_{\overrightarrow{g}^{-1}(B)} e^{-\frac{1}{2}\cdot||\overrightarrow{s}||^2}d\overrightarrow{s} = \int\limits_{B} e^{-\frac{1}{2}\cdot||\overrightarrow{t}||^2}d\overrightarrow{t}$$

מתקיים $f_W(x) = e^{-\frac{1}{2}\cdot||\overrightarrow{t}||^2}$ לכן, $\overrightarrow{W} \sim N(0, I_n)$ ובעלת פונקציית צפיפות מתאימה.