מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 8

1. יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים, B_X בסיס של X,
B_Y בסיס של Y.
<u>הוכיחו</u> שפונקציה $f: X \to Y$ רציפה בנקודה $x_0 \in X$ אם"ם לכל סביבה $V \in B_Y$ של הנקודה $f(x_0)$ קיימת סביבה $U \in B_X$ של הנקודה x_0 כך ש- $f(U) \subseteq V$.

2. (מההרצאה) יהי X מ"ט ו- $\{p\}$ נקודון.
<u>הוכיחו</u> ש-X הומאומורפי ל-$\{p\} \times X$.

3. יהיו $X_1, X_2, \dots, X_n$ מ"ט כך שכל אחד מהם מכיל תת קבוצה בת מניה שצפופה בו.
<u>הוכיחו</u> שמ"ט $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ מכיל תת קבוצה בת מניה שצפופה בו.

4. יהי X מרחב טופולוגי.
<u>הוכיחו</u> ש-X הוא מרחב האוסדורף אם"ם תת קבוצה $\{(x,x) \in X \times X | x \in X\}$ סגורה במרחב המכפלה $X \times X$.

5. (מההרצאה) <u>הוכיחו</u> שהטופולוגיה הרגילה ב-$\mathbb{R}^n$ מתלכדת עם הטופולוגית המכפלה. (<u>הערה</u> בהרצאה היתה הוכחה חלקית (ראה\ראי). נשאר להוכיח שבתוך כל תיבה מוכל כדור ובתוך כל כדור מוכלת תיבה).

6. יהי $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, x^2 + y^2 = 1\}$ עם טופולוגיה המושרה מ-$\mathbb{R}^2$. תהי $f: S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
<u>הוכיחו</u> ש- $f(S^1 \times S^1) = [a,b]$ כאשר $a,b \in \mathbb{R}$.