תרגול 11

אסימפטוטה אנכית

תהי $f\left(x\right)$ פונקציה המוגדרת בסביבה ימנית או בסביבה שמאלית של הנקודה $x=a$, פרט אולי לנקודה $x=a$ עצמה. אם לפחות אחד מן הגבולות $\lim_{x\to a^-} f\left(x\right), \lim_{x\to a^+} f\left(x\right)$ קיים במובן הרחב ושווה ∞ או $-\infty$ אז נאמר כי הישר $x=a$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה $f\left(x\right)$.

דוגמאות

1. $f\left(x\right)=\ln\left(2+x\right)$ הגבול $\lim_{x\to -2^+} f\left(x\right)=-\infty$ ולכן $x=-2$ אסימפטוטה אנכית.
2. $f\left(x\right)=\tan x$ נשים לב ש $f\left(x\right)=\frac{\sin x}{\cos x}$ ולכן כאשר $\cos x$ מתאפס נקבל אסימפטוטה אנכית כלומר כאשר $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ (k שלם).
3. $f\left(x\right)=e^{-\frac{1}{x}}$ $\lim_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x}}=\infty$ ולכן $x=0$ אסימפטוטה אנכית.

אסימפטוטה משופעת

הישר $y=ax+b$ נקרא אסימפטוטה משופעת של הפונקציה $f\left(x\right)$ ב $+\infty$ אם $\lim_{x\to\infty}\left[f\left(x\right)-\left(ax+b\right)\right]=0$.

הישר הנ"ל ייקרא אסימפטוטה משופעת ב $-\infty$ אם $\lim_{x\to -\infty}\left[f\left(x\right)-\left(ax+b\right)\right]=0$.

במקרה המיוחד $a=0$ האסימפטוטה נקראת גם האסימפטוטה האופקית של $f\left(x\right)$.

משפט

תהיי $f\left(x\right)$ פונקציה המוגדרת בקטע $\left(a,\infty\right)$. אם קיימים הגבולות $a=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}, b=\lim_{x\to\infty}\left[f\left(x\right)-ax\right]$ אז הישר $y=ax+b$ הוא האסימפטוטה המשופעת היחידה ב $+\infty$ של $f\left(x\right)$.

תהיי $f\left(x\right)$ פונקציה המוגדרת בקטע $\left(-\infty,c\right)$. אם קיימים הגבולות $a=\lim_{x\to -\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}, b=\lim_{x\to -\infty}\left[f\left(x\right)-ax\right]$ אז הישר $y=ax+b$ הוא האסימפטוטה המשופעת היחידה ב $-\infty$ של $f\left(x\right)$.

תרגיל

מצא את כל האסימפטוטות לגרף של הפונקציה $f\left(x\right)=\frac{\left(x-1\right)^3}{\left(x+1\right)^2}$.

פתרון

$\lim_{x\to -1^-}\frac{\left(x-1\right)^3}{\left(x+1\right)^2}=\lim_{x\to -1^-}\frac{\left(x-1\right)^3}{\left(x+1\right)^2}=-\infty$ ולכן $x=-1$ אסימפטוטה אנכית של $f\left(x\right)$.

נמצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $a=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-1\right)^3}{x\left(x+1\right)^2}=1$.

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f\left(x\right)-ax\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\left(x-1\right)^3}{\left(x+1\right)^2}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\left(x-1\right)^3}{\left(x+1\right)^2}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x^2+2x-1}{\left(x+1\right)^2}=-5$$

לכן הישר $y=x-5$ הוא אסימפטוטה משופעת ב ∞ של $f\left(x\right)$.

נבדוק אסימפטוטה משופעת ב $-\infty$.

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-1)^3}{x(x+1)^2}=1$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}-x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}-x\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{-5x^2+2x-1}{(x+1)^2}=-5$$

הישר $y=x-5$ הוא גם אסימפטוטה משופעת ב $-\infty$ של $f(x)$.

<u>מציאת נקודות קיצון</u>

<u>הגדרה</u>

תהיי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה x_0. נאמר כי ל $f(x)$ יש מינימום מקומי בנקודה x_0 אם קיימת סביבה מסוימת x_0 אשר בה מתקיים $f(x)>f(x_0)$ לכל x בסביבה זו. נאמר כי ל $f(x)$ קיים מקסימום מקומי בנקודה x_0 אם קיימת סביבה מסוימת של x_0 אשר לכל x בתוכה מתקיים $f(x)<f(x_0)$.

<u>משפט פרמה (ראינו שיעור שעבר)</u>

תהיי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע הפתוח (a,b) וגזירה בנקודה פנימית x_0. אם $f(x)$ מקבלת בנקודה x_0 את ערכה הגדול ביותר או את ערכה הקטן ביותר אזי $f'(x_0)=0$.

עבור פונקציה נתונה $f(x)$ פתרון המשוואה $f'(x)=0$ וערכי x שעבורם הפונקציה לא מוגדרת נותן נקודות חשודות לקיצון הנקראות גם נקודות קריטיות.

<u>דוגמא</u>

נמצא את נקודות הקריטיות של הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}\ln^2 x$.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln^2 x+\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot 2\ln x\Rightarrow\frac{\ln^2 x}{2\sqrt{x}}+\frac{2\ln x}{\sqrt{x}}=0\Rightarrow\ln^2 x+4\ln x=0$$

נציב $t=\ln x$ ונקבל $t^2+4t=0 \Leftarrow t_1=0, t_2=-4$.

נציב חזרה ונקבל $\ln x=0 \Rightarrow x=1$, $\ln x=-4 \Rightarrow x=\frac{1}{e^4}$ קיבלנו שהנקודות החשודות לקיצון הן $\left(\frac{1}{e^4},\frac{16}{e^2}\right),(1,0)$.

נשים לב שהנגזרת מוגדרת בכל תחום ההגדרה של הפונקציה.

<u>תחומי עלייה ותחומי ירידה של פונקציה</u>

<u>משפט</u>

תהיי $f(x)$ פונקציה גזירה בקטע (a,b). אזי

א. $f(x)$ מונוטונית עולה בקטע זה אם ורק אם $f'(x)\ge 0$, לכל $a<x<b$.

ב. $f(x)$ מונוטונית יורדת בקטע זה אם ורק אם $f'(x)\le 0$, לכל $a<x<b$.

<u>כיצד נברר תחומי עלייה וירידה של הפונקציה</u>

<u>שלב א</u>

מציאת כל הנקודות החשודות ונקודות אי הרציפות של הפונקציה.

<u>שלב ב</u>

רישום כל הערכים שמצאת בשלב א מהקטן לגדול (רצוי בטבלה). $x_1<x_2<x_3\ldots<x_n$.

שלב ג

בחירת ערכים (שנמצאים בתחום ההגדרה של הפונקציה) $a_1, a_2, a_3..., a_n, a_{n+1}$ המקיימים $a_1 < x_1 < a_2 < x_2 < a_3 < x_3 ... a_n < x_n < a_{n+1}$.

שלב ד

הצבת הערכים $a_1, a_2, a_3..., a_n, a_{n+1}$ בפונקצית הנגזרת.

אם $f'(a_i) < 0$ אז הפונקציה יורדת בקטע (x_{i-1}, x_i).

אם $f'(a_i) > 0$ אז הפונקציה עולה בקטע (x_{i-1}, x_i).

שלב ה

בדיקה עבור הנקודות החשודות לקיצון שאינן קיצון.

דוגמא

נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin x$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

א. מצא את הנקודות חיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה שלה הפונקציה.

פתרון

א. חיתוך עם ציר ה x : $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 0 \Rightarrow \tan x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$.

התחום הוא: $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ ולכן נקודת החיתוך היא $\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$.

חיתוך עם ציר ה y : $f(0) = \sqrt{3}$ ולכן נקודת החיתוך היא $(\sqrt{3}, 0)$.

ב. כדי למצוא את נקודות הקיצון נגזור ונשווה לאפס.

$$f(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin x$$

$$f'(x) = -\sqrt{3}\sin x + \cos x$$

$$-\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$$

$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi k$$

התחום הוא $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ נמצא תחומי עלייה וירידה ע"י טבלה

$\frac{\pi}{2}$	$< x <$	$\frac{\pi}{6}$	$< x <$	$-\frac{\pi}{2}$	x
	יורד		עולה		y
	שלילי		חיובי		y'

$f'(0)=1>0,\ f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-1<0$

נקודות קיצון: $\left(\frac{\pi}{6},2\right)$ מקסימום, $\left(-\frac{\pi}{2},-1\right)$ מינימום בקצה, $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ מינימום בקצה.

ג. תחומי עלייה $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{6}$. תחומי ירידה $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}$.

<u>דרכים לקבוע האם נקודת קיצון היא מינימום או מקסימום</u>

<u>מבחן הנגזרת הראשונה</u>

תהי x_0 נקודה קריטית של הפונקציה $f(x)$, ונניח כי $f(x)$ רציפה בנקודה x_0, גזירה בסביבת הנקודה x_0 פרט אולי לנקודה x_0 עצמה. אזי

א. אם $f'(x)$ מחליפה סימן משלילי לחיובי בנקודה x_0 אזי x_0 היא נקודת מינימום מקומי של $f(x)$.

ב. אם $f'(x)$ מחליפה סימן מחיובי לשלילי בנקודה x_0 אזי x_0 היא נקודת מקסימום מקומי של $f(x)$.

ג. אם $f'(x)$ שומרת סימן בנקודה x_0 אזי x_0 אינה נקודת קיצון של $f(x)$.

<u>תרגיל</u>

נתונה הפונקציה $f(x)=|x-2.25|e^{x^2}$.

א. מצא את הנקודות הקריטיות של הפונקציה.

ב. קבע עבור כל נקודה מסעיף א האם היא נקודת מינימום/מקסימום/לא נקודת קיצון.

<u>פתרון</u>

א. ניתן לרשום את הפונקציה באופן הבא: $f(x)=\begin{cases}(x-2.25)e^{x^2} & x>2.25\\ -(x-2.25)e^{x^2} & x\le 2.25\end{cases}$.

עבור $x>2.25$ נקבל ש $f'(x)=e^{x^2}+2x(x-2.25)e^{x^2} \Leftarrow f'(x)=(2x^2-4.5x+1)e^{x^2}$.

עבור $x<2.25$ נקבל ש $f'(x)=-(2x^2-4.5x+1)e^{x^2}$.

נשים לב ש $f'_+(2.25)=e^{5.0625}$ ו $f'_-(2.25)=-e^{5.0625}$.

הנגזרות החד צדדיות לא שוות בנקודה $x=2.25$, ולכן הנגזרת לא קיימת.

כדי לבדוק לאילו ערכי x הנגזרת מתאפסת נפתור את המשוואה $2x^2-4.5x+1=0$.

$x_1=2,\ x_2=\frac{1}{4}$.

סה"כ קיבלנו שהנקודות הקריטיות הן: $\left(\frac{1}{4},2e^{\frac{1}{16}}\right),\left(2,\frac{e^4}{4}\right),(2.25,0)$.

ב.

נבדוק עבור כל אחד מהמקרים האם הנגזרת מחליפה סימן.

ראינו כבר שעבור $x=2.25$ הנגזרת מחליפה סימן משלילי לחיובי ז"א $(2.25,0)$ היא נקודות מינימום.

מכיוון שהנגזרת מוגדרת בכל נקודה בקטע $(2,2.25)$ נקבל ממשפט רול שלכל $x\in(2,2.25)$ הנגזרת לא משנה סימן ז"א ניתן להציב כל x בקטע כדי לדעת את סימן הנגזרת אחרי $x=2$.
נקבל ש $f'(2.1)$ שלילי.

באותו אופן נבחר נקודה בקטע $\left(\frac{1}{4},2\right)$. $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ חיובי.

סה"כ קיבלנו שהנגזרת משנה סימן בנקודה מחיובי לשלילי ולכן הנקודה $\left(2,\frac{e^4}{4}\right)$ היא נקודת מקסימום.

עבור $x=\frac{1}{4}$. נציב בנגזרת נקודה מהקטע $\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)$ נניח 0 ונקבל ש $f'(0)$ שלילי.

ראינו ש $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ חיובי.

הנגזרת ב $x=\frac{1}{4}$ משנה סימן משלילי לחיובי, ולכן הנקודה $\left(\frac{1}{4},2e^{\frac{1}{16}}\right)$ היא נקודת מינימום.

<u>מבחן הנגזרת השנייה</u>

תהיי x_0 נקודה קריטית של הפונקציה $f(x)$, ונניח כי $f(x)$ גזירה פעמיים בנקודה x_0. אזי

א. אם $f''(x)>0$ אז x_0 היא נקודת מינימום מקומי של $f(x)$.

ב. אם $f''(x)<0$ אז x_0 היא נקודת מקסימום מקומי של $f(x)$.

ג. אם $f''(x)=0$ אז לא ניתן לדעת כלום על x_0 משיטה זו ויש לבדוק את הנקודה x_0 בשיטה אחרת.

<u>הערה</u>

נשים לב שלא ניתן להשתמש במבחן הנגזרת השנייה בתרגיל הקודם עבור $x=2.25$ מכיוון שהנגזרת לא מוגדרת שם.

<u>תרגיל</u>

מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)=6\sqrt[3]{x}-\ln x$.

<u>פתרון</u>

נמצא תחילה את הנקודות הקריטיות $f(x)=6x^{\frac{1}{3}}-\ln x \Leftarrow f'(x)=2x^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{x} \Leftarrow f'(x)=\frac{2}{x^{\frac{2}{3}}}-\frac{1}{x}$.

נפתור את המשוואה $0=\frac{2}{x^{\frac{2}{3}}}-\frac{1}{x}=0 \Leftarrow 2x-x^{\frac{2}{3}}=0 \Leftarrow x^{\frac{2}{3}}\left(2x^{\frac{1}{3}}-1\right)=0$ מכיוון ש $x\neq 0$ נקבל ש

$2x^{\frac{1}{3}}-1=0 \Leftarrow x^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2} \Leftarrow x=\frac{1}{8}$.

קיבלנו נקודה קריטית $\left(\frac{1}{8},3+\ln 8\right)$.

נבדוק בעזרת מבחן הנגזרת השנייה האם הנקודה היא מינימום/מקסימום.

$$f'(x)=2x^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{x} \Leftarrow f''(x)=-\frac{4}{3}x^{-\frac{5}{3}}+\frac{1}{x^2} \Leftarrow f''(x)=-\frac{4}{3x^{\frac{5}{3}}}+\frac{1}{x^2} \Leftarrow f''\left(\frac{1}{8}\right)>0$$

והנקודה $\left(\frac{1}{8}, 3+\ln 8\right)$ היא נקודת מינימום.

הערה

נניח שהפונקציה $f(x)$ גזירה בסביבת הנקודה x_0 ו $f'(x_0)=0$.

אם $f'(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ אז מספיק לבדוק את הסימן של $\frac{g'(x_0)}{h(x_0)}$ כדי להשתמש במבחן הנגזרת השנייה.

הסבר

$$f'(x)=\frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f''(x)=\frac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{h^2(x)} \Rightarrow f''(x_0)=\frac{g'(x_0)h(x_0)-g(x_0)h'(x_0)}{h^2(x_0)}$$

מכיוון ש $f'(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ ו $f'(x_0)=0$ נקבל ש $g(x_0)=0$ ואז

$$f''(x_0)=\frac{g'(x_0)h(x_0)-g(x_0)h'(x_0)}{h^2(x_0)}=\frac{g'(x_0)h(x_0)}{h^2(x_0)}=\frac{g'(x_0)}{h(x_0)}.$$

תרגיל

מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)=\frac{x\ln x}{\ln x-2}$.

פתרון

נגזור את הפונקציה ונשווה לאפס.

$$f(x)=\frac{x\ln x}{\ln x-2} \Rightarrow f'(x)=\frac{(\ln x+1)(\ln x-2)-\ln x}{(\ln x-2)^2}$$

יש לפתור את המשוואה $(\ln x+1)(\ln x-2)-\ln x=0$ נציב $t=\ln x$ ונקבל

$$(t+1)(t-2)-t=0 \Rightarrow t^2-2t-2=0 \Rightarrow t_1=1+\sqrt{3}, t_2=1-\sqrt{3}.$$

הנקודות הקריטיות הן $x_1=e^{1+\sqrt{3}}, x_2=e^{1-\sqrt{3}}$.

נשתמש בהערה הקודמת כדי לבדוק את סוג הקיצון.

מכיוון ש $(\ln x-2)^2>0$ מספיק לבדוק את סימן הנגזרת עבור $g(x)=\ln^2 x-2\ln x-2$.

$g'(x)=\frac{2\ln x-2}{x}$ ואז $g'\left(e^{1-\sqrt{3}}\right)<0, g'\left(e^{1+\sqrt{3}}\right)>0$.

עבור $x=e^{1+\sqrt{3}}$ נקבל מינימום ועבור $x=e^{1-\sqrt{3}}$ נקבל מקסימום.

הגדרה

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בנקודה x_0. נאמר כי $f(x)$ קמורה כלפי מטה בנקודה x_0 אם קיימת סביבה של הנקודה x_0 אשר בה הגרף של הפונקציה נמצא מתחת לישר המשיק לגרף בנקודה זו.

כלומר, קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל x המקיים $0<|x-x_0|<\varepsilon$ מתקיים $f(x)<f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

באופן דומה, נאמר כי $f(x)$ קמורה כלפי מעלה בנקודה x_0 אם קיימת סביבה של הנקודה x_0 אשר בה הגרף של הפונקציה נמצא מעל לישר המשיק לגרף בנקודה זו.

כלומר, קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל x המקיים $0<|x-x_0|<\varepsilon$ מתקיים $f(x)>f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

אם $f(x)$ היא פונקציה גזירה בקטע הפתוח (a,b), אזי נאמר כי $f(x)$ קמורה כלפי מטה בקטע הפתוח (a,b) אם היא קמורה כלפי מטה בכל נקודה של הקטע ונאמר כי $f(x)$ קמורה כלפי מעלה בקטע הפתוח (a,b) אם היא קמורה כלפי מעלה בכל נקודה של הקטע.

<u>נקודות פיתול</u>

נאמר כי הנקודה x_0 היא נקודת פיתול של הפונקציה $f(x)$ אם $f(x)$ רציפה וגזירה בסביבת הנקודה x_0 כך שבסביבה שמשמאל ל x_0 הפונקציה קעורה כלפי מטה ובסביבה שמימין ל x_0 הפונקציה קעורה כלפי מעלה (או להפך).

<u>משפט</u>

תהיי $f(x)$ פונקציה גזירה פעמיים בסביבת הנקודה x_0. אם הנגזרת השנייה $f''(x)$ מחליפה סימן בנקודה x_0 אזי x_0 היא נקודת פיתול של $f(x)$.

<u>תרגיל</u>

מצא את נקודות הפיתול של הפונקציה $f(x)=x\sqrt{2x-1}$.

<u>פתרון</u>

נגזור פעמיים את הפונקציה ונשווה לאפס.

$$f(x)=x\sqrt{2x-1} \Leftarrow f'(x)=\sqrt{2x-1}+\frac{x}{\sqrt{2x-1}} \Leftarrow f''(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}+\frac{\sqrt{2x-1}-\frac{x}{\sqrt{2x-1}}}{2x-1}$$

סה"כ נקבל ש $f''(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}+\frac{2x-1-x}{(2x-1)\sqrt{2x-1}}$ יש לפתור את המשוואה $2x-1+2x-1-x=0$

נקודה חשודה לפיתול היא $x=\frac{2}{3}$ נשים לב ש $f''(x)=\frac{3x-2}{(2x-1)\sqrt{2x-1}}$ ואז עבור $x<\frac{2}{3}$ נקבל ש $f''(x)<0$ ועבור $x>\frac{2}{3}$ נקבל ש $f''(x)>0$ הנגזרת השנייה משנה סימן ולכן הנקודה $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ היא נקודת פיתול.

<u>משפט</u>

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$. אזי ל $f(x)$ יש לפחות נקודת מינימום מוחלט אחת ונקודת מקסימום מוחלט אחת בתוך הקטע.

<u>כיצד למצוא את הערך הגדול ביותר והערך הקטן ביותר של הפונקציה בקטע $[a,b]$</u>

<u>שלב 1</u>

מציאת הנקודות החשודות בקטע הפתוח (a,b) (הנקודות שבהן הנגזרת מתאפסת והנקודות שבהן הנגזרת לא מוגדרת).

<u>שלב 2</u>

חישוב $f(a), f(b)$.

<u>שלב 3</u>

מבין שיעורי ה y של הנקודות שמצאת בשלב 1 ו $f(a), f(b)$ המספר הגדול ביותר הוא הערך הגדול ביותר והמספר הקטן ביותר הוא הערך הקטן ביותר.

<u>תרגיל</u>

הוכח כי לכל $x\in[-2,2]$ מתקיים האי שוויון הבא: $(x+2)\sqrt{4-x^2}\le 3\sqrt{3}$.

<u>פתרון</u>

יש למצוא את המקסימום המוחלט של הפונקציה $f(x)=(x+2)\sqrt{4-x^2}$ בקטע $(-2,2)$.

שלב 1

נמצא את הנקודות החשודות של הפונקציה $f(x)=(x+2)\sqrt{4-x^2}$ בקטע $[-2,2]$.

$$f(x)=(x+2)\sqrt{4-x^2} \Rightarrow f'(x)=1\cdot\sqrt{4-x^2}+(x+2)\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow f'(x)=\sqrt{4-x^2}-\frac{x^2+2x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}\cdot\sqrt{4-x^2}-(x^2+2x)}{\sqrt{4-x^2}},\ f'(x)=\frac{4-x^2-x^2-2x}{\sqrt{4-x^2}},\ f'(x)=\frac{-2x^2-2x+4}{\sqrt{4-x^2}}$$

הנגזרת מתאפסת כאשר $\frac{-2x^2-2x+4}{\sqrt{4-x^2}}=0 \Leftarrow x^2+x-2=0 \Leftarrow (x+2)(x-1)=0$.

$x_1=-2, x_2=1$.

$x=-2$ נפסל.

הנקודה החשודה היא $(1,3\sqrt{3})$.

שלב 2

$f(-2)=0,\ f(2)=0$.

שלב 3

המספר הגדול ביותר מבין המספרים $0,3\sqrt{3}$ הוא $3\sqrt{3}$ ולכן המקסימום המוחלק הוא $3\sqrt{3}$ ז"א

$f(x)\le 3\sqrt{3}$ לכל $x\in[-2,2]$ ולכן מתקיים $(x+2)\sqrt{4-x^2}\le 3\sqrt{3}$ לכל $x\in[-2,2]$.

חקירה מלאה של פונקציות

תרגיל

א. חקור באופן מלא (תחום הגדרה, אסימפטוטות, תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול) וצייר סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)=\frac{x^3-4}{x^2}$.

ב. לאילו ערכים של פרמטר a למשוואה $\frac{x^3-4}{x^2}=x+a$ אין שורשים ממשיים?

פתרון

א. תחום הגדרה – המכנה מתאפס כאשר $x^2=0$ ולכן תחום ההגדרה הוא $x\neq 0$.

אסימפטוטה אנכית – כאשר $x=0$ המכנה מתאפס ולכן הישר $x=0$ חשוד לאסימפטוטה אנכית.

$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3-4}{x^2}=-\infty,\ \lim_{x\to 0^+}\frac{x^3-4}{x^2}=-\infty$ ולכן $x=0$ אסימפטוטה אנכית.

אסימפטוטה משופעת –

תזכורת:

אסימפטוטה משופעת

הישר $y=ax+b$ נקרא אסימפטוטה משופעת של הפונקציה $f(x)$ ב $+\infty$ אם $\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$.

הישר הנ"ל ייקרא אסימפטוטה משופעת ב $-\infty$ אם $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$.

במקרה המיוחד $a=0$ האסימפטוטה נקראת גם האסימפטוטה האופקית של $f(x)$.

משפט

תהיי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע (a,∞). אם קיימים הגבולות $a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]$

אז הישר $y = ax + b$ הוא האסימפטוטה המשופעת היחידה ב $+\infty$ של $f(x)$.

תהיי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע $(-\infty, c)$. אם קיימים הגבולות $a = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x) - ax\right]$

אז הישר $y = ax + b$ הוא האסימפטוטה המשופעת היחידה ב $-\infty$ של $f(x)$.

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-4}{x\cdot x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-4}{x^3} = 1, b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3-4}{x^2} - x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3-4-x^3}{x^2}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{-4}{x^2}\right] = 0$$

$$a = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-4}{x\cdot x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-4}{x^3} = 1, b = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3-4}{x^2} - x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3-4-x^3}{x^2}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-4}{x^2}\right] = 0$$

האסימפטוטה המשופעת ב $-\infty$ וב $+\infty$ היא $y = x$.

נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה.

נבדוק תחילה לאילו ערכי x הנגזרת מתאפסת:

$$f(x) = \frac{x^3-4}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2\cdot x^2 - 2x\cdot\left(x^3-4\right)}{x^4} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^4+8x}{x^4} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^3+8}{x^3}.$$

הנגזרת מאפסת כאשר $x^3 + 8 = 0$ כלומר כאשר $x = -2$.

נבדוק תחומי עלייה וירידה:

x	$x <$	-2	$< x <$	0	$< x$
$f(x)$	עולה		יורד		עולה
$f'(x)$	חיובי	0	שלילי		חיובי

נקודת מקסימום $(-2, -3)$.

תחומי עלייה $x > 0$ או $x < -2$.

תחומי ירידה $-2 < x < 0$.

נמצא נקודות פיתול:

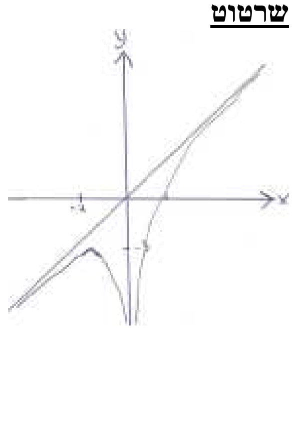
נשווה את הנגזרת השנייה לאפס

$$f'(x) = \frac{x^3+8}{x^3} \Rightarrow f''(x) = \frac{3x^2\cdot x^3 - 3x^2\cdot\left(x^3+8\right)}{x^6} \Rightarrow f''(x) = \frac{-24x^2}{x^6} \Rightarrow f''(x) = \frac{-24}{x^4}.$$

הנגזרת השנייה לא מתאפסת ולכן אין נקודות פיתול.

הנגזרת השנייה שלילית בכל תחום הגדרת הפונקציה ולכן הפונקציה קעורה כלפי מטה לכל x .

<u>שרטוט</u>



ב. על פי השרטוט ניתן לראות שכל הפונקציה מתחת לישר $y = x$ ולכן כאשר $a > 0$ אין פתרון למשוואה

$$\frac{x^3 - 4}{x^2} = x + a.$$