ב"א בדידה תשעז מועד ב

1. תהיינה שתי פונקציות $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. נגיד ש f <u>מתאימה</u> ל g אם

$$\forall x_1 \in \mathbb{R} \exists x_2 \in \mathbb{R} \,:\, g(x_1) = f(x_2)$$

פתרון: פונקציה היא מתאימה אם לכל x_1 קיים x_2 עבורו מתקיים $g(x_1) = f(x_2)$. השלילה הלוגית היא

$$\exists x_1 \in \mathbb{R} \forall x_2 \in \mathbb{R} \,:\, g(x_1) \neq f(x_2)$$

כלומר שקיים x_1 כך שלכל x_2 מתקיים $g(x_1) \neq f(x_2)$

(א) האם $f(x) = x^2$ מתאימה ל $g(x) = (x-1)^2$?
פתרון: כן .יהא x_1 ממשי. נגדיר $x_2 = x_1 - 1$ ונקבל ש

$$g(x_1) = (x_1 - 1)^2 = f(x_1 - 1) = f(x_2)$$

(ב) האם $f(x) = e^x$ מתאימה ל $g(x) = x$?
פתרון: לא. למשל $x_1 = -1$ ממשי ונראה ש

$$\forall x_2 \in \mathbb{R} \,:\, g(x_1) \neq f(x_2)$$

(המשך שלילת הפסוק שמגדיר פונקציה מתאימה). אכן, לכל x_2 מתקיים כי $f(x_2) = e^{x_2} > 0$ ולכן

$$g(x_1) = -1 \neq f(x_2)$$

(ג) תהיינה פונקציות f, g כך ש f מתאימה ל g. האם בהכרח g מתאימה ל f?
פתרון: נגדיר $g(x) = e^x$ ו $f(x) = x$ אז ראינו ש g אינה מתאימה ל f בסעיף קודם (בסעיף קודם האותיות היו הפוכות).
נותר להראות ש f מתאימה ל g. אכן, יהא x_1 אז נגדיר $x_2 = e^{x_1}$ ונקבל ש

$$g(x_1) = e^{x_1} = f(x_2)$$

כנדרש.

2. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

(א) לכל שתי קבוצות A, B מתקיים $(A \backslash B) \cup (A \backslash C) = A \backslash (B \cup C)$.

פתרון: הפרכה $A=\{1,2\}, B=\{2\}, C=\{1\}$ ואז

$$(A\backslash B)\cup(A\backslash C)=\{1\}\cup\{2\}=A$$

ומצד שני

$$A\backslash(B\cup C)=A\backslash A=\emptyset$$

ומכיוון ש $A\neq\emptyset$ נקבל שהשיוון בשאלה לא מתקיים.

(ב) לכל שלוש קבוצות A,B,C אם $A\backslash B\subseteq A\backslash C$ אז $A\cap C\subseteq A\cap B$.
פתרון: הוכחה: נניח כי $A\backslash B\subseteq A\backslash C$ ונראה כי $A\cap C\subseteq A\cap B$. יהא $x\in A\cap C$ ונרצה להראות ש $x\in A\cap B$. כיוון ש $x\in A\cap C$ אז $x\in A$ ולכן מספיק להוכיח כי $x\in B$ ואז ביחד $x\in A\cap B$. נניח בשלילה כי $x\notin B$ אזי, מכיוון ש $x\in A$ נקבל כי $x\in A\backslash B$ ולפי ההנחה ש $A\backslash B\subseteq A\backslash C$ נסיק ש $x\in A\backslash C$ ובפרט $x\notin C$ אבל ראינו ש $x\in A\cap C$ ולכן $x\in C$. סתירה.

(ג) לכל שלוש קבוצות A,B,C מתקיים $(A\backslash B)\backslash C\subseteq A\backslash(B\backslash C)$.
פתרון: הוכחה:יהא $x\in(A\backslash B)\backslash C$ ונראה כי $x\in A\backslash(B\backslash C)$. כיוון ש $x\in(A\backslash B)\backslash C$ אז בפרט $x\in A\backslash B$ ולכן $x\in A$ וגם $x\notin B$ לכן $x\in A$ וגם $x\notin B\backslash C$ ולכן $x\in A\backslash(B\backslash C)$ כמו שרצינו.

3. תהי סדרה המוגדרת ע"י $a_1=1, a_2=2$ ונוסחת נסיגה $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$.
הוכיחו באינדוקציה (רגילה או מלאה) כי לכל n מתקיים $a_{n+1}+a_n$ מתחלק ב 3 ללא שארית.
פתרון: הוכחה:

- בסיס $n=1$: אכן, $a_2+a_1=2+1=3$ מתחלק ב 3 ללא שארית.
- צעד: נניח נכונות עבור n, כלומר, $a_{n+1}+a_n$ מתחלק ב 3 ללא שארית. נוכיח נכונות עבור $n+1$, כלומר, $a_{n+2}+a_{n+1}$ מתחלק ב 3 ללא שארית. מתקיים

$$a_{n+2}+a_{n+1}\underbrace{=}_{\text{הגדרת הסדרה}}(a_{n+1}+2a_n)+a_{n+1}=2(a_{n+1}+a_n)$$

ומכיוון ש $(a_{n+1}+a_n)$מתחלק ב 3 ללא שארית (הנחת האינדוקציה) אז גם $2(a_{n+1}+a_n)$ מתחלק ב 3 ללא שארית.

4. תהיינה $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם f חח"ע אזי גם $f\circ f$ חח"ע.
פתרון: הוכחה: אם f חח"ע אז $f\circ f$ חח"ע כהרכבה של פונקציות חח"ע.

(ב) אם $f\circ f$ חח"ע אזי גם f חח"ע.
פתרון: הוכחה: אם $f\circ f$ חח"ע אז f ("הימנית") חח"ע.

(ג) אם f חח"ע ו g חח"ע אזי גם $f+g$ חח"ע.
פתרון: הפרכה: נגדיר $f(n)=n$ (הזהות) היא חח"ע. ונגדיר

$$g(n)=\begin{cases}n & n\geq 3\\ 1 & n=2\\ 2 & n=1\end{cases}$$

(הפונקציה שמחליפה $2\leftrightarrows 1$ ושאר המספרים נשלחים לעצמם) היא גם חח"ע אבל

$$(g+f)(1)=g(1)+f(1)=2+1=3$$

$$(g+f)(2)=g(2)+f(2)=1+2=3$$

ולכן $(g+f)(1)=(g+f)(2)$ ולכן $g+f$ אינה חח"ע.

5. תהיינה קבוצות $B=\{1,2,3,4,5\}\,,A=\{1,2,3\}$. ענו על השאלות הבאות בפירוט:

(א) כמה פונקציות ישנן מהקבוצה A אל הקבוצה B?
פתרון: כל פונקציה $f:A\to B$ ניתנת להגדרה ע"י קביעת הערכים $f(1)=?,f(2)=?,f(3)=?$. לכל אחד משלושת הערכים האלה יש 5 אפשריות (איברי B) ולכן התשובה היא $5\cdot5\cdot5=5^3$.

(ב) כמה פונקציות <u>חח"ע</u> ישנן מהקבוצה A אל הקבוצה B?
פתרון: כל פונקציה חח"ע $f:A\to B$ ניתנת להגדרה ע"י קביעת ערכים <u>שונים</u> $f(1)=?,f(2)=?,f(3)=?$. ולכן צריך לבחור 3 ערכים ולסדרם "בשורה" כך שהראשון בשורה יהיה הערך $f(1)$ השני בשורה יהיה הערך $f(2)$ והשלישי בשורה יהיה הערך $f(3)$. 3 הערכים נבחרים מהקבוצה B, בת 5 אפשריות ומספר האפשרויות לעשות זאת הוא $\binom{5}{3}$. אח"כ סידור שלושת הערכים הנבחרים בשורה יכול להיעשות ב $3!$ דרכים. לכן התשובה הסופית היא $\binom{5}{3}\cdot3!$.

(ג) בכמה פונקציות מהקבוצה A אל הקבוצה B, לפחות איבר אחד נשלח ל 4?
פתרון: מספר הפונקציות הכולל הוא 5^3 כמו שראינו בסעיף הראשון. נחסיר מ 5^3 את מספר הפונקציות בהם אין איבר שנשלח ל 4 ונקבל את התשובה לסעיף זה. מספר הפונקציות שאין איבר שנשלח ל 4 הם בעצם פונקציות מ A ל $\{1,2,3,5\}$. מספר הפונקציות האלה הוא 4^3 (בדומה לסעיף א) לכן התשובה הסופית היא 5^3-4^3.