$$g(x) = \begin{cases} x & x > 1 \\ 0 & x = 1 \\ |x+1| & x < 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 2 \\ 0 & x = 2 \\ g(x) & x < 2 \end{cases}$$

מצא לאילו ערכי x מתקיים אי השיוויון הבא:

$$f\Big(g(x)\Big) + x > |x-1|$$

<u>נתחיל מהתחום x>1</u>

אי השיוויון בתחום זה נראה כך:

$$f(x) + x > x - 1$$
$$f(x) > -1$$

קל לראות ש $g(x) \geq 0$ בכל תחומה ולכן גם $f(x) \geq 0$ בכל תחומה.

לכן אי השיוויון מתקיים בכל התחום $x > 1$

<u>נעבור לתחום</u> $x = 1$:

אי השיוויון בנקודה זו נראה כך:

$$f\big(g(1)\big) + 1 > |1-1|$$

$$f\big(g(1)\big) = f(0) = g(0) = 1$$

ואכן מתקיים אי השיוויון גם בנקודה זו, הידד. yeet.

<u>נעבור לתחום $x < 1$:</u>

כך אי השיוויון נראה כך:

$$f(|x+1|) + x > 1 - x$$

$$f(|x-(-1)|) > 1 - 2x$$

על מנת לדעת מה f עושה ל $|x+1|$ צריך לבדוק מתי הוא גדול מ2, שווה ל2 או קטן מ2.

קל לראות שבקטע $-3 < x < 1$ מתקיים כי $|x+1| < 2$ ובנקודה $x = -3$ זה שווה 2, ואחרת גדול מ2.

<u>כלומר נצמצם את התחום שלנו כרגע רק ל $-3 < x < 1$</u>

אי השיוויון נראה כך:

$$g(|x+1|) > 1 - 2x$$

כעת מעניין אותנו מתי $|x+1|<1$ וקל לראות מתי

<u>נצמצם עוד יותר את התחום ל $0<x<1$</u>

וכעת אי השיוויון נראה כך:

$$|x+1|>1-2x$$

כמובן ש $x+1>0$ בתחום, ולכן אי השיוויון נראה כך:

$$x+1>1-2x$$

$$3x>0$$

מתקיים בכל התחום הזה.

<u>נעבור לנקודה $x=0$:</u>

אי השיוויון:

$$0>1$$

לא מתקיים!

<u>נעבור לתחום $-2<x<0$:</u>

בתחום זה $|x+1|<1$ ולכן אי השיוויון נראה כך:

$$\big||x+1|+1\big|>1-2x$$
$$|x+1|+1>1-2x$$
$$|x+1|>-2x$$

כיוון ששני הצדדיים אי שליליים אי שיוויון זה מתקיים, אם ורק אם אי השיוויון המתקבל מהעלאת האגפים בריבוע מתקיים. זה יעלים את הערך המוחלט.

$$x^2+2x+1>4x^2$$

$$3x^2-2x-1<0$$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{6}=-\frac{1}{3},1$$

לכן בתוך התחום, אי השיוויון מתקיים עבור $-\frac{1}{3}<x<0$

ולא מתקיים ב$-2<x<-\frac{1}{3}$.

<u>בנקודה $x=-2$:</u>

$$0<5$$

לא מתקיים בנקודה זו

בתחום $-3 < x < -2$:

אי השיוויון:

$$|x+1| > 1-2x$$

$$-x-1 > 1-2x$$

$$x > 2$$

לא מתקיים.

נעבור לנקודה $x = -3$:

זה בתוך התחום $x < 1$ שם האי שיוויון הוא

$$f(|x+1|) + x > 1-x$$

ולכן אי השיוויון נראה כך:

$$0-3 > 4$$

לא מתקיים.

נעבור לתחום $x < -3$:

כאן $|x+1| > 2$ ולכן אי השיוויון הוא

$$(x+1)^2 + x > 1-x$$

$$x^2 + 4x > 0$$

$$x(x+4) > 0$$

לא מתקיים בתת התחום $-4 \le x < -3$

כן מתקיים בתחום $x < -4$

סיכום:

אי השיוויון המקורי מתקיים אם ורק אם:

$$x < -4 \quad , \quad -\frac{1}{3} < x < 0 \quad , \quad x > 0$$