פתרון מבחן מועד ב' – 86-147 חדו"א 1 לאודיסאה – 05/03/23

מרצה: דר' ארז שיינר | משך המבחן: שלוש שעות | חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק' | ענו על כל השאלות | כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

<u>יש לכתוב את התשובות על גבי טופס המבחן במקום המתאים בלבד. מותר לכתוב משני צידי הדף.</u>

<u>מחברות הטיוטה מושלכות ולא תבדקנה.</u>

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)\cdot\sin(x+1)}{1-\cos(\sqrt{x})}$

$$\lim_{x\to 0^+}\underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\sin(x+1)}_{\to\sin(1)}\cdot\underbrace{\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{1-\cos\left(\sqrt{x}\right)}}_{\to 2}=2\sin(1)$$

ב. $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin(e^x)}{x^2+1}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}\cdot\frac{1+\frac{\sin(e^x)}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=\left\{0\cdot\frac{1+0}{1+0}\right\}=0$$

ג. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2^n+3^n}}{n}$

ראשית נשים לב כי

$$\lim\sqrt[n]{2^n+3^n}=\lim\sqrt[n]{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}=\lim 3\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)^{\frac{1}{n}}=3\cdot 1^0=3$$

המונה שואף למספר סופי, ואילו המכנה שואף לאינסוף ולכן סה"כ

$$\lim\frac{\sqrt[n]{2^n+3^n}}{n}=0$$

2.

א. חשבו את $\int\frac{\ln(\ln(x))}{x}dx$.

$$\int\frac{\ln(\ln(x))}{x}dx=\begin{Bmatrix}t=\ln(x)\\ dt=\frac{1}{x}dx\end{Bmatrix}=\int\ln(t)\,dt=\begin{Bmatrix}f'=1 & g=\ln(t)\\ f=t & g'=\frac{1}{t}\end{Bmatrix}=t\ln(t)-\int 1dt=t\ln(t)-t+C=$$

$$=\ln(x)\ln(\ln(x))-\ln(x)+C$$

ב. חשבו את האינטגרל הבא $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}dx = \int_1^\infty x^{-\frac{3}{2}}dx = \left[\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_1^\infty = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{-\frac{1}{2}} = \left\{-\infty^{-\frac{1}{2}} = 0\right\} = 2$$

3.

א. מה הערך המינימלי של הפונקציה $f(x) = e^{2x} - x$.

נחקור את הפונקציה

$$f'(x) = 2e^{2x} - 1 = 0$$

$$e^{2x} = \frac{1}{2}$$

$$2x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$$

$$x = -\frac{\ln(2)}{2}$$

כיוון שהנגזרת שהינה רציפה מתאפסת בנקודה אחת בלבד, מימין לנקודה סימנה קבוע, ומשמאל לנקודה סימנה קבוע.

(זה יחד עם משפט ערך הביניים מהווה הצדקה לשיטת הטבלה מהתיכון.)

למשל $-1 < -\frac{\ln(2)}{2} < 0$

$$f'(-1) < 0$$

$$f'(0) > 0$$

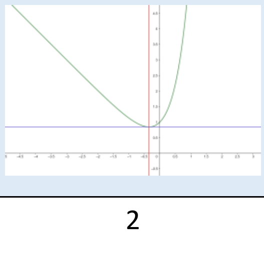
ולכן הפונקציה עולה בתחום $\left[-\frac{\ln(2)}{2}, \infty\right)$ ויורדת בתחום $\left(-\infty, -\frac{\ln(2)}{2}\right]$

ולכן הערך המינימלי הגלובאלי שלה מתקבל בנקודה $-\frac{\ln(2)}{2}$

ולכן הערך המינימלי הוא

$$f\left(-\frac{\ln(2)}{2}\right) = e^{2\left(-\frac{\ln(2)}{2}\right)} - \left(-\frac{\ln(2)}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\ln(2)}{2}$$

המחשה גרפית:



ב.   מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $e^{2x} = x + \frac{1}{2} + \frac{\ln(2)}{2}$.

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x) = e^{2x} - x - \frac{1}{2} - \frac{\ln(2)}{2}$$

ראשית נשים לב לדמיון לשאלה הראשונה, שהרי

$$h(x) = f(x) - \left(\frac{1}{2} + \frac{\ln(2)}{2}\right)$$

כלומר זו הפונקציה מסעיף א' פחות הערך המינימלי שלה.

ולכן התשובה היא שיש פתרון אחד בלבד למשוואה, אצדיק זאת כעת:

$$h'(x) = f'(x)$$

ולכן תחומי העלייה והירידה זהים, ולפונקציה h יש מינימום גלובאלי באותה נקודה $x = -\frac{\ln(2)}{2}$.

$$h\left(-\frac{\ln(2)}{2}\right) = 0$$

ולכן הפונקציה h חיובית לפני הנקודה וחיובית אחרי הנקודה וסה"כ פוגשת את ציר x בנקודה זו בלבד.

4.   תהי f פונקציה הגזירה לכל $x > 0$ המקיימת $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

א.   הוכיחו או הפריכו: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

הפרכה: נבחר $f(x) = 1$ אכן פונקציה גזירה, אכן $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ אבל $\lim_{x\to\infty} f(x) \neq 0$

הערה: למעשה ייתכן כי $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ כמו בדוגמאות $\sqrt{x}$, $\ln(x)$

ב.   הוכיחו או הפריכו: $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

הפרכה: נבחר $f(x) = \sin(x)$ שהיא חסומה ולכן מקיימת את הנתון, אבל הנגזרת שלה, $\cos(x)$ כמובן אינה שואפת לאפס באינסוף.

5. תהי סדרה a_n המקיימת לכל n כי $a_{n+1} = a_n^2 - a_n$ וכן $a_1 > 2$.

א. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $a_n > 2$.

נעזר באינדוקציה

$a_1 > 2$ ממש נתון, יהי n עבורו $a_n > 2$ צ"ל כי $a_{n+1} > 2$

$$a_{n+1} = a_n^2 - a_n = a_n(a_n - 1) > 2(2 - 1) = 2$$

שימו לב: הגדלנו את שני הביטויים במכפלה, וכיוון שהם חיוביים הגדלנו את המכפלה כולה.

ב. חשבו את $\lim a_n$.

ראשית נבדוק האם הסדרה מונוטונית

$$a_{n+1} - a_n = a_n^2 - 2a_n = a_n(a_n - 2) > 2 \cdot 0 = 0$$

הסדרה מונוטונית עולה.

<u>אם</u> הסדרה חסומה היא מתכנסת לגבול סופי כיוון שהיא מונוטונית, נסמן גבול זה ב $a_n \to L$

נשאיף את שני צידי נוסחת הנסיגה

$$\lim a_{n+1} = \lim a_n^2 - a_n$$

$$L = L^2 - L$$

$$L^2 - 2L = 0$$

$$L(L - 2) = 0$$

מכאן הגבולות האפשריים הם $L = 0,2$.

כיוון שהסדרה עולה, $L \geq a_1 > 2$ ולכן שני הגבולות נפסלים ולא ייתכן כי הסדרה חסומה!

ולכן סה"כ מתקיים כי $a_n \to \infty$ כי היא עולה ואינה חסומה.

.6

א. חשבו את גבול הסדרה

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(n+k)^2}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(n+k)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2}{(n+k)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n}{n+k}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)^2$$

זו סדרת סכומי רימן של הפונקציה $f(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)^2$ הרציפה בקטע $[0,1]$ ולפי המשפט שנלמד בכיתה סדרת סכומי הרימן שואפת לאינטגרל המסויים

$$a_n \to \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x}\right)^2 dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = \begin{Bmatrix} t = x+1 \\ dt = dx \end{Bmatrix} = \int_1^2 t^{-2} dt = \left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_1^2 = \frac{2^{-1}}{-1} - \frac{1^{-1}}{-1} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

ב. קרבו את $\cos(1)$ עד כדי שגיאה של $h = \frac{1}{100}$.

כמובן שנעזר בטיילור על הפונקציה $f(x) = \cos(x)$ סביב הנקודה המצוייה (נקודת ההשקה) $x_0 = 0$

בנקודה הרצוייה $x = 1$

כל הנגזרת הן פלוס מינוס סינוס או קוסינוס ולכן חסומות תמיד ע"י 1 ולכן השגיאה היא

$$|R_n| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(1-0)^{n+1}\right| \le \frac{1}{(n+1)!}(1-0)^{n+1}$$

עבור $n = 4$ נקבל כי

$$|R_4| \le \frac{1}{5!} = \frac{1}{120} < \frac{1}{100}$$

פולינום טיילור מסדר ארבע של קוסינוס הוא

$$p_4 = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

ולכן הקירוב המתאים הוא

$$\cos(1) \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24}$$