תת חבורה נורמלית (תח"נ)

תזכורת

$H \leq G$ היא תח"נ אם $\forall g \in G\, gH = Hg$. סימון: $H \trianglelefteq G$

דוגמאות

1. לכל חב' G שתי תח"נ טריוויאליות: $G \trianglelefteq G$ ו$\{e\} \trianglelefteq G$.
2. אם G אבלית - כל ת"ח היא נורמלית.
3. $SL_n\left(\mathbb{F}\right) \trianglelefteq GL_n\left(\mathbb{F}\right)$
4. לכל חב' G $Z\left(G\right) \trianglelefteq G$.

עובדה

$H \leq G$ אמ"ם $\forall g \in G\, gHg^{-1} = H$

הוכחה

$$H \trianglelefteq G$$

$$\Leftrightarrow \forall g \in G\, gH = Hg$$

$$\Leftrightarrow \forall g \in G\, hHh^{-1} = Hgg^{-1} = H$$

הגדרה

תהיינה G, L חב'. יהי $\varphi : G \to L$ הומ' (של חבורות)

גרעין של φ: $\ker\varphi := \{g \in G : \varphi\left(g\right) = e_L\}$

תמונה של φ: $\mathrm{Im}\ \varphi := \{x \in L : \exists g \in G\, \varphi\left(g\right) = x\}$

טענה

אם $\varphi : G \to L$ הומ' אזי

i $\quad \ker\varphi \trianglelefteq G$

ii $\quad \mathrm{Im}\ \leq L$

הוכחה

ii תמיד $e_L \in \mathrm{Im}\ \varphi$ (כי יש לו מקור תחת φ $\varphi(e_G) = e_L$)
מכאן $\mathrm{Im}\ \varphi \neq \emptyset$. כדי להוכיח ש-$\mathrm{Im}\ \varphi$ ת"ח נותר להראות סגירות לחת כפל והפכי.
אכן, לכל $x_1, x_2 \in Im\varphi$ יש מקורות $g_1, g_2 \in G$ בהתאמה. כלומר

$$\varphi(g_1) = x_1$$

$$\varphi(g_2) = x_2$$

ואז

$$x_1x_2 = \varphi(g_1)\varphi(g_2) = \varphi(g_1g_2)$$

מכאן $x_1x_2 \in Im\varphi$.
סגירות תחת הופכי: $\forall x \in Im\varphi$ יש מקור $g \in G$ ואז $\varphi(g) = x$ ולכן $x^{-1} = \varphi(g)^{-1} = \varphi\left(g^{-1}\right)$ כי φ הומ' ולכן $x^{-1} \in Im\varphi$

i ראשית נראה כי $\ker\varphi \leq G$. ראשית $\ker\varphi \neq \emptyset$ כי $\varphi(e_G) = e_L$ ולכן $e_G \in \ker\varphi$.
הגרעין סגור תחת כפל כי לכל $g_1, g_2 \in \ker\varphi$

$$\varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2) = e_Le_L = e_L \Rightarrow g_1g_2 \in \ker\varphi$$

הגרעין סגור תחת הפכי - $\forall g \in \ker\varphi$:

$$\varphi\left(g^{-1}\right) = \varphi(g)^{-1} = e_L^{-1} = e_L \Rightarrow g^{-1} \in \ker\varphi$$

הראנו $\ker\varphi \leq G$. כעת נראה שהגרעין תח"נ.
לפי עובדה מתחילת השיעור נותר להראות $\forall g \in G\, g(\ker\varphi)g^{-1} = \ker\varphi$
נסמן $K := \ker\varphi$. צ"ל $gKg^{-1} = K$
לכל $k \in K$

$$\varphi\left(gkg^{-1}\right) = \varphi(g)\varphi(k) = \varphi\left(g^{-1}\right) = \varphi(g)e_L\varphi\left(g^{-1}\right) = \varphi(g)\varphi\left(g^{-1}\right)$$

$$= \varphi\left(gg^{-1}\right) = \varphi(e_G)e_L \Rightarrow \forall k \in K\, gkg^{-1} \in K$$

מכאן $gKg^{-1} \leq K$. נותר להראות $K \leq gKg^{-1}$

$$\Leftrightarrow g^{-1}Kg \subseteq g^{-1}gKg^{-1}g = K$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in k\, g^{-1}kg \in K$$

אכן, $\forall k \in K$

$$\varphi\left(g^{-1}kg\right) = \varphi\left(g^{-1}\right)\varphi(k)\varphi(g) = \varphi\left(g^{-1}\right)e_L\varphi(g)$$

$$= \varphi\left(g^{-1}\right)\varphi(g) = \varphi\left(g^{-1}g\right) = \varphi(e_G) = e_L$$

$$\Rightarrow \forall k \in K\, g^{-1}kg \in K$$

דוגמה

1) $\varphi : GL_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}^*$ המוגדר ע"י $\varphi(A) = \det A$. במקרה זה

$$\ker\varphi = \{A \in GL_n(\mathbb{F}) : \varphi(A) = 1\} = \{A \in GL_n(\mathbb{F}) : \det A = 1\} = SL_n(\mathbb{F})$$

<u>מסקנה</u>: $SL_n(\mathbb{F}) \trianglelefteq GL_n(\mathbb{F})$

2) $G = \mathbb{Z}$, $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $\varphi(k) = k \bmod n$. φ הומ'

$$\ker\varphi = \{k \in \mathbb{Z} : \varphi(k) = 0\} = n\mathbb{Z}$$

<u>מסקנה</u>: $n\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}$

3) $G = S_n$(החבורה הסימטרית, או חבורת התמורות)
$sign(\pi)$ - הסימן של ההעתקה. מקבל 1 עבור מס' הפרות סדר זוגי, -1 עבור מס' הפרות סדר אי זוגי. הפרת סדר - $i < j, \pi(i) > \pi(j)$
נגדיר העתקה $\varphi : S_n \to \mathbb{F}_3^*$($\mathbb{F}_3^* = \{1, -1\} \cong \mathbb{Z}_2$) ע"י $\varphi(\pi) := sign\pi$

משפט

$sign : S_n \to \mathbb{F}_3^*$ היא הומ'.

הוכחה

בהמשך הקורס.

מסקנה

$\ker sign = \{\pi \in S_n : sign(\pi) = 1\}$ תח"נ בS_n.

חבורות מנה

הגדרה

תהא G חבורה, $A, B \subseteq G$.

$$AB := \{ab : a \in A, b \in B\}$$

טענה 1

תהא $H \trianglelefteq G$.

$$\forall a, b \in G\; aH \cdot bH = abH$$

הוכחה

$$(aH)(bH)=a((Hb)H)=a((bH)H)=(ab)(HH)=abH$$

מסקנה

כפל שתי מחלקות של תח"נ שווה למחלקה שלישית.

הערה

אם H ת"ח שאינה נורמלית המסקנה לא תהיה נכונה.

במילים אחרות המסקנה אומרת:

אם $H \trianglelefteq G$ כפל מחלקות מקיים סגירות.

הגדרה

תהא $N \trianglelefteq G$. נסמן בG/N את הקבוצה של המחלקות של N בG עם כפל קבוצות.

טענה 2

אם $N \trianglelefteq G$ אז G/N חבורה.

הוכחה

נבדוק את האקסיומות

1. סגירות ביחס לכפל - הוכחנו(טענה 1 לעיל)
2. אסוצ. לכל שלוש מחלקות $aN, bN, cN \in G/N$

$$(aNbN)cN=abNcN=(ab)cN=a(bc)N=aNbcN=aN(bNcN)$$

3. קיום אבר יחידה.
$N=eN$ אבר יחידה. אכן, לכל $aN \in G/N$

$$aNeN=aeN=aN$$

$$eNaN=eaN=aN$$

4. קיום הפכי: לכל $aN \in {}^{G}/_{N}$

$$a^{-1}NaN = a^{-1}aN = eN$$

$$aNa^{-1}N = aa^{-1}N = eN$$

לכן $(aN)^{-1} = a^{-1}N$

דוגמאות לחבורות מנה

1. $G \trianglelefteq G$, ${}^{G}/_{G} \cong \{e\}$
2. $\{e\} \trianglelefteq G$, ${}^{G}/_{\{e\}} \cong G$ (הוכחה: השלם)
3. $n\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}$.

$$^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}} = \{0 + n\mathbb{Z}, 1 + n\mathbb{Z}, ...(n-1) + n\mathbb{Z}\}$$

לכל שתי מחלקות $a + n\mathbb{Z}, b + n\mathbb{Z}$

$$(a + n\mathbb{Z}) + (b + n\mathbb{Z}) = a + b + n\mathbb{Z} = (a + b) \mod n + n\mathbb{Z}$$

טענה

$^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}$

הוכחה

השלם פרטים

תזכורת

בהנתן העתקה $\varphi : \mathbb{Z} \to n\mathbb{Z}_n$ הנתונה ע"י $\varphi(k) = k \mod n$ φ היא הומ'

$$\ker \varphi = n\mathbb{Z}$$

$$Im\varphi = \mathbb{Z}_n$$

קבלנו במקרה זה $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ הומ'. ${}^{\mathbb{Z}}/_{\ker\varphi} \cong Im\varphi$

עוד דוגמה

$\det : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ הומ'.

$$\ker \det = SL_n(\mathbb{R})$$

$$Im \det = \mathbb{R}^*$$

מתקיים ${}^{GL_n(\mathbb{R})}/_{SL_n(\mathbb{R})}$. תרגיל: הוכח.

משפט האיז' הI

תהיינה G,L חב'. $\varphi: G\to L$ הומ', אזי $\,^{G}\!/_{\ker\varphi}\cong Im\varphi$

הוכחה

נסמן $K:=\ker\varphi$. נגדיר העתקה $\bar{\varphi}:\,^{G}\!/_{K}\to Im\varphi$ ע"י $\bar{\varphi}\left(gK\right):=\varphi\left(g\right)$
צ"ל: $\bar{\varphi}$ מוגדרת היטב, חח"ע, על, שומרת פעולה.
אכן:

(א) $\bar{\varphi}$ מוגדרת היטב: צ"ל $g_1K=g_2K\Rightarrow\bar{\varphi}\left(g_1K\right)=\bar{\varphi}\left(g_2K\right)$.
אכן:

$$g_1K=g_2K$$

$$\Leftrightarrow g_2^{-1}g_1\in K$$

$$\Leftrightarrow\varphi\left(g_2^{-1}g_1\right)=e_L$$

$$\Leftrightarrow\varphi\left(g_2^{-1}\right)\varphi\left(g_1\right)=e_L$$

$$\Leftrightarrow\varphi\left(g_2\right)^{-1}\varphi\left(g_1\right)=e_L$$

<u>הערה</u>: <u>תרגיל</u>: φ הומ' מG אז $\forall g\in G\,\varphi\left(g^{-1}\right)=\varphi\left(g\right)^{-1}$

$$\Leftrightarrow\varphi\left(g_1\right)=\varphi\left(g_2\right)$$

$$\Leftrightarrow\bar{\varphi}\left(g_1K\right)=\bar{\varphi}\left(g_2K\right)$$

(ב) $\bar{\varphi}$ חח"ע, כלומר צ"ל $\bar{\varphi}\left(g_1K\right)=\bar{\varphi}\left(g_2K\right)\Rightarrow g_1K=g_2K$. הוכחנו זאת ב(א)

(ג) $\bar{\varphi}$ על. אכן לכל $x\in Im\varphi$ יש מקור $g\in G$ כך ש$\varphi\left(g\right)=x$, ואז $\bar{\varphi}\left(gK\right)=x$

(ד) $\bar{\varphi}$ הומ'. אכן, לכל זוג איברים ב$\,^{G}\!/_{K}$, $g_1,g_2\in\,^{G}\!/_{K}$:

$$\bar{\varphi}\left(g_1K\right)\bar{\varphi}\left(g_2K\right)=\varphi\left(g_1\right)\varphi\left(g_2\right)=\varphi\left(g_1g_2\right)=\bar{\varphi}\left(g_1g_2K\right)=\bar{\varphi}\left(g_1Kg_2K\right)$$