פעולות של חבורות

תזכורת

פעולה של חבורה G על קבוצה X היא הומו' $\varphi : G \to S\left(X\right)$

דוגמאות

(א) G פועלת על $X=G$ ע"י הצמדה.

(ב) S_n פועלת על זוגות סדורים של אותיות $\{1,2,...n\}$ $X=\{(i,j):1\leq i<j\leq n\}$

הגדרה - מסלול

תהא $\varphi : G \to S\left(X\right)$ פעולה, $x\in X$.

$$\sigma\left(x\right):=\left\{ \varphi\left(g\right)\left(x\right):g\in G\right\}$$

בדוגמאות הנ"ל

(א) $\sigma\left(x\right)=\mathrm{cong}\left(x\right)=\left\{ gxg^{-1}:g\in G\right\}$ בדוגמה א' לעיל.

(ב) $\sigma\left(\left(1,1\right)\right)=\left\{ \pi\left(1,1\right):\pi\in S_{n}\right\} =\left\{ \left(\pi\left(1\right),\pi\left(1\right)\right):\pi\in S_{n}\right\} =\left\{ i,i:1\leq i\leq n\right\}$ בדוגמה ב' לעיל.

טענה

X איחוד זר של מסלולים(ז"א לכל $x,y\in X$, $\sigma\left(x\right)=\sigma\left(y\right)$ או $\sigma\left(x\right)\cap\sigma\left(y\right)=\emptyset$ וגם $\bigcup\limits_{x\in X}\sigma\left(x\right)=X$

הוכחה

נראה שהיחס $x\in\sigma\left(x\right)$ הוא יחס שקילות.

(1) $x\in\sigma\left(x\right)$ כי $\varphi\left(\varphi\left(x\right)\right)=x$ לכל $x,y\in X$

(2) $x\in\sigma\left(y\right)\Leftarrow y\in\sigma\left(x\right)$ כי

$$y\in\sigma\left(x\right)\Leftrightarrow\varphi\left(g^{-1}\right)\left(x\right)y\Rightarrow\forall g\in G,\varphi\left(g\right)\left(y\right)=x$$

(3) $x\in\sigma\left(x\right)\wedge y\in\sigma\left(z\right)\Leftarrow a\in\sigma\left(z\right)$. אכן מתקיים $x\in\sigma\left(y\right)\Leftrightarrow=\exists_{g\in G}\varphi\left(g\right)\left(y\right)$ וx $y\in\sigma\left(z\right)\Leftrightarrow\exists_{h\in G}\varphi\left(h\right)\left(z\right)=y$ ואז

$$\varphi\left(gh\right)\left(z\right)=\varphi\left(g\right)\varphi\left(h\right)z=\varphi\left(g\right)\left(y\right)=x$$

הוכחנו $x\in\sigma\left(y\right)$ יחס שקילות ולכן מסלולים הם מחלקות שקילות ולכן X איחוד זר של מסלולים.

משפט 1

תהא G חבורה סופית, X קבוצה. נניח שG פועל על X אזי לכל $x \in X$, $|G| \mid |\sigma(x)|$

הגדרה - מייצב

בהינתן $\varphi : G \to S(S)$ המייצב של $x \in X$ הוא $\mathrm{St}_x := \{g \in G : \varphi(g)(x) = x\}$

דוגמה

(א) פעולת הצמדה. $\mathrm{St}_x = Z_x$ - המייצב הוא המרכז.

(ב) S_n פועלת על זוגות סדורים של אותיות שונות

$$\mathrm{St}((1,1)) = \{\pi \in S_n : \sigma(\pi)(1,1) = (1,1)\} = \{\pi \in S_n : \pi(1) = 1\}$$

$$|\mathrm{St}(1,1)| = (n-1)$$

$$|\sigma(1,1)| = n$$

משפט 2

בהינתן פעולה של חב' סופית G על X

$$\forall_{x \in X} |\sigma(x)| |\mathrm{St}_x| = |G|$$

הערה

משפט 2 $\Leftarrow$ משפט 1

הוכחת משפט 2

טענה 1 $\forall_{x \in X} \mathrm{St}_x \leq G$

הוכחה השלם

לפי משפט לגרנז' $|G| = |\mathrm{St}_x| [G : \mathrm{St}_x]$ ולכן כדי להוכיח משפט 2 מ"ל $|\sigma(x)| = [G : \mathrm{St}_x]$. נגזיר העתקה ψ מ$\sigma(x)$ לקבוצת המחלקות השמאליות של St_x בG ע"י $\psi(\varphi(g)(x)) = g\mathrm{St}_x$.

צ"ל: ψ מוגדרת היטב, חח"ע ועל.

(i) מוגדרת היטב וחח"ע

$$\forall g,h\in G$$

$$\varphi\left(g\right)\left(x\right)=\varphi\left(h\right)\left(x\right)\Leftrightarrow\varphi\left(h\right)^{-1}\varphi\left(y\right)\left(x\right)=x\Leftrightarrow\varphi\left(h^{-1}g\right)\left(x\right)=x$$

$$\Leftrightarrow h^{-1}g\in\mathrm{St}_x\Leftrightarrow g\mathrm{St}_x=h\mathrm{St}_x\Leftrightarrow\psi\left(\varphi\left(g\right)\left(x\right)\right)=\psi\left(\varphi\left(h\right)\left(x\right)\right)$$

(ii) על

כי לכל $g\mathrm{St}_x$ שבתמונה יש מקור $\varphi\left(g\right)\left(x\right)$.

משוואות המחלקות

תאה G חבורה סופית. יהיה k מספר מחלקות הצמידות בG שסדרן גדול מ1. יהיו $G \ni x,...x_n$ נציגים של המחלקות האלה. מתקיים:

$$\boxed{|G|=|Z\left(G\right)|+\sum_{i=1}^{k}|\mathrm{cong}\left(x_i\right)|}$$

הוכחה

כזכור G איחוד זר של מחלקות הצמידות. יהיו $x_1,...x_k\in G$ נציגים של מחלקות הצמידות שסדרן גדול מאחד ויהיו $x_{k+1},...x_m$ נציגים של מחלקון הצמידות שסדרן=1. מתקיים $G=\coprod_{i=1}^{m}\mathrm{cong}\left(x_i\right)$ ולכן

$$|G|=\sum_{i=1}^{m}|\mathrm{cong}\left(x_i\right)|=\sum_{i=1}^{k}|\mathrm{cong}\ x_i|+\sum_{i=k+1}^{m}\mathrm{cong}\ x_i$$

אבל הסכום השני שווה למספר האיברים שגודל מחלקת הצמידות שלהם היא איחוד.
■

תרגילון $x\in Z\left(G\right)\Leftrightarrow|\mathrm{cong}\left(x\right)|=1$