דוגמה

קבע האם המישורים מקבילים?

$$\begin{array}{ll} I. & 3x-4y+5z=0 \\ II. & -6x+8y-10z-4=0 \end{array}$$

פתרון

משיקולים גאומטריים: מישורים מקבילים $\Leftrightarrow$ הנורמלים שלהם מקבילים. עבור I ברור שהנורמל הוא $(3,-4,5)$. עבור II ברור שהנורמל הוא $(-6,8,-10)$. הוקטורים תלויים לינארית $\Leftrightarrow$ המישורים מקבילים

המשך טורי טיילור

תזכורת $P_r\left(\vec{x}\right)=\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{i!}d^i f_{p_0}\left(\vec{x}-p_0\right)$

דוגמה 1

חשבו טור טיילור מסדר 3 עבור הפונקציה $f\left(x,y\right)=e^x\sin y$

פתרון

נשתמש בטורים ידועים. תזכורת של טורים ידועים:

$$e^x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n x^{2n+1}}{\left(2n+1\right)}$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n x^{2n}}{\left(2n\right)!}$$

במקרה שלנו נכפיל את הטור של $\sin$ בטור של e ונקבל

$$e^x\cdot\sin y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n\cdot y^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!}$$

ההצגה הזו אינה של טור טיילור.
עבור סדר 3 נחפש מתי סכום החזקות של x וy הוא 3.

$$e^x\sin y=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}\right)\cdot\left(1+y-\frac{y^3}{3!}-...\right)$$

נבחר רק דרגה קטנה מ3

$$1\left(y-\frac{y^3}{3!}\right)+x\cdot y+\frac{x^2}{2!}\cdot y=\boxed{y-\frac{y^3}{6}+x\cdot y+\frac{x^2y}{2}=P_3\left(x,y\right)}$$

(לא נוסיף $\frac{x\cdot y^3}{3}$ כי הדרגה היא 4 וביקשו עד דרגה 3)

דוגמה 2

חשבו טיילור מסדר 2 לפונקציה $f\left(x,y\right)=x^y$ סביב הנקודה $\left(1,1\right)$.

פתרון

נפתח טור טיילור לפי הגדרה

$$f\left(1,1\right)=1$$

$$f'_x=y\cdot x^{y-1}\Rightarrow f'_x\left(1,1\right)=1$$

$$f'_y=x^y\ln x\Rightarrow f'_y\left(1,1\right)=0$$

$$f''_{xx}=y\cdot\left(y-1\right)\cdot x^{y-2}\Rightarrow f''_{xx}\left(1,1\right)=0$$

$$f''_{yy}=x^y\ln^2 x\Rightarrow f''_{yy}\left(1,1\right)=0$$

$$f''_{yx}=yx^{y-1}\ln x+\frac{x^y}{x}\Rightarrow f''_{yx}\left(1,1\right)=1$$

$$f''_{xy}=x^{y-1}+yx^{y-1}\cdot\ln x\Rightarrow f''_{xy}\left(1,1\right)=1$$

(תזכורת: ראינו שיעור שעבר שאם $f\in C^n$ אז סדר הגזירה החלקית לא משנה עד סדר n)

נציב בנוסחת טיילור

$$\boxed{P_2=f\left(1,1\right)+f'_x\left(1,1\right)\left(x-1\right)+f'_y\left(1,1\right)\left(y-1\right)+\frac{1}{2!}\Big[f''_{xx}\left(1,1\right)\left(x-1\right)^2+2f''_{xy}\left(1,1\right)\left(x-1\right)\left(y-1\right)+f''_{yy}\left(1,1}$$

$$\boxed{P_2\left(x,y\right)=1+\left(x-1\right)+\left(x-1\right)\left(y-1\right)}$$

זו התשובה ו<u>אסור</u> לפתוח סוגריים - זהו הפיתוח של טור טיילור.

משפט(תנאי מספיק למינימום מקומי)

תהי f פונקציה ממשית ממח' C^2 בסביבה של נקודה קריטית x^0, ונניח ש- $H=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right)$ מוגדרת חיובית בנק. x^0. (דהיינו: כל המינורים M_i $(i=1,...k)$ של $H\left(x^0\right)$ חיוביים).

אזי: הנק. x^0 היא נקודת מינימום מקומית של f.

הוכחה

נרשום את נוסחת טיילור עבור f בנק. x^0 (אפשרי כי f היא ממח' C^2) עם $n=1$.

$$f\left(x^0+h\right)=f\left(x^0\right)+\left.(h\cdot\nabla)f\right|_{x^0}+\frac{1}{2!}\left.(h\cdot\nabla)^2 f\right|_{x^0+\theta h}$$

עבור h, $0<\theta<1$ מתאימים. ולכן:

$$f\left(x^0+h\right)-f\left(x^0\right)=\frac{1}{2}(h\cdot\nabla)^2 f\left(x^0+\theta h\right)$$

$$h\nabla=\sum_{i=1}^{k}h_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$(h\nabla)^2=\left(\sum_{i=1}^{k}h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{k}h_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)=\sum_{i,j=1}^{k}h_ih_j\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}$$

$$\left.(h\nabla)^2 f\right|_x=\sum_{i,j=1}^{k}h_ih_j\cdot\underbrace{\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right|_x}_{H_{ij}(x)}=h\left.H\right|_x h^t$$

H_{ij} פונקציה רציפה בסביבה של x^0 (כי f ממח' C^2 בסביבה של x^0).

דוגמה 3

פתחו את הטור טיילור של הפונקציה $f(x,y)=\frac{x}{y}$ סביב הנק. $(1,1)$.

פתרון

נכתוב את f באופן הבא:

$$f(x,y)=\frac{x-1+1}{y-1+1}=\frac{x-1}{1+(y-1)}+\frac{1}{1+(y-1)}=(x-1)\cdot\frac{1}{1+(y-1)}+\frac{1}{1+(y-1)}$$

תזכורת טור הנדסי: $\boxed{\frac{1}{1-q}=\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}}$

ובמקרה הכללי: $\sum_{i=1}^{n}q^{i-1}=\frac{1-q^n}{1-q}$

נסמן $\frac{1}{1+(y-1)} = \frac{1}{1-(-(y-1))} = \sum_{n=0}^{\infty}(-(y-1))^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(y-1)^n$

ונחזור למשוואה

$$f(x,y)=(x-1)\cdot\frac{1}{1+(y-1)}+\frac{1}{1+(y-1)}=(x-1)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(y-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(y-1)^n$$

$$\boxed{f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(y-1)^n((x-1)+1)}$$

אנחנו בעצם רוצים הצגה של $(x-a)$ ו$(y-b)$ עבור הנק. (a,b)

דוגמה 4

מצא טור טיילור סביב הנק. $(0,0)$ כאשר $f(x,y)=\frac{x}{1+y^2}$

פתרון

נכתוב $f(x,y)=x\cdot\frac{1}{1+y^2}=(x-0)\cdot\frac{1}{1+y^2}$. נמצא טור מתאים לביטוי $\frac{1}{1+y^2}$.

נעזר בתכונות טור הנדסי $\frac{1}{1-(-y^2)}$. ברור שהטור מתכנס עבור $1>\left|-y^2\right|$ ו$(0,0)$ האי הסביבה שלנו אז זה בסדר.

$$\frac{1}{1-(-y^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-y^2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot y^{2n}$$

ולכן

$$f(x,y)=x\cdot\frac{1}{1+y^2}=x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y^{2n}\qquad(*)$$

תזכורת: במקרה זה ניתן להגדיר בקלות טור טיילור מהצורה $(x-0)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(y-0)^k$

עבור $k=2n$. $k=2n$ יקבל את הטור עצמו, $k\neq 2n$ יקבל 0.

דוגמה 5

מצאו טור טיילור מסדר 8 לפונקציה $f(x,y) = \frac{1}{1-x^2y}$ סביב $(0,0)$ ומצאו בעזרתו את $\frac{\partial^6 f}{\partial x^4 \partial y^2}$

פתרון

טור הנדסי: $\left|x^2y\right| < 1$ והרי צריך סביב הנק. $(0,0)$.

$$\frac{1}{1-x^2y} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^2y\right)^n$$

$$P_8(x,y) = 1 + x^2y + x^4y^2$$

לא לקחנו יותר כי הבא הוא x^8y^4 וזה 12 וצריך עד סדר 8.
מיחידות טור טיילור נובע כי

$$\frac{1}{6!} \cdot \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot \frac{\partial^6 f}{\partial x^4 \partial y^2}$$

ונקבל

$$\frac{1}{4!2!} \cdot \frac{\partial^6 f}{\partial x^4 \partial y^2} = 1$$

מכיוון שהמקדם של x^4y^2 הוא 1. ולכן $\frac{\partial^6 f}{\partial x^4 \partial y^2} = 4! \cdot 2! = 48$

נק. מינימום ומקסימום

דוגמה 1

מצא את כל נקודות הקיצון המקומיות עבור $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$

פתרון

נמצא נגזרות חלקיות

$$f'_x(x,y) = 6x - 2y$$

$$f'_y(x,y) = -2x + 2y - 8$$

ברור שקיימת נקודה חשודה כנק. קיצון אם $f'_x = 0 \wedge f'_y = 0$

$$\begin{cases} 6x - 2y = 0 \\ -2x + 2y - 8 = 0 \end{cases}$$

$$4x-8=0\Rightarrow 4x=8\Rightarrow \boxed{x=2}$$

$$6\cdot 2-2y=0\Rightarrow \boxed{y=6}$$

הנק. קיצון הזו $(2,6)$, אם היא אכן קיצון היא רק מקומית כי זה פולינום ששואף לאינסוף. כאשר נציב $f(2,6)=3\cdot 4-24+26-48=-24$ זו נק. מינימום כי שואפים ל∞

משפט

אם לf קיצון מקומי ב(x_0,y_0)והנגזרות החלקיות מסדר ראשון של f קיימות אזי $f'_x(x_0,y_0)=0\wedge f'_y(x_0,y_0)=0$