תרגיל בית 8 מבוא לחוגים ומודולים
88-212 סמסטר ב' תשע"ח

שאלה 1. הסבירו מדוע המשוואה $6 = 2 \cdot 3 = \left(1+\sqrt{7}\right)\left(-1+\sqrt{7}\right)$ לא סותרת את העובדה ש-$\mathcal{O}_7 = \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ הוא תחום פריקות יחידה.

שאלה 2. הראו שבפירוקים $\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-6} = -2 \cdot 3$ בחוג $\mathcal{O}_{-6} = \mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ כל הגורמים הם אי פריקים, אינם חברים, ואינם ראשוניים.

שאלה 3. יהי F שדה. הוכיחו שחוג המנה $F[x,y,z]/\left\langle xy - z^2 \right\rangle$ אינו תחום פריקות יחידה.

שאלה 4. יהי R חוג. נגדיר עבורו פונקציית נורמת אידאליס לפי $N(0) = 0$ ולכל $0 \neq a \in R$, $N(a) = |R/\left\langle a \right\rangle|$.

א. הוכיחו שאם R תחום שלמות, אז N היא פונקציה כפלית (בחשבון עוצמות).

ב. מצאו דוגמת נגד לסעיף הקודם כאשר R אינו תחום שלמות. רמז: מספיק לקחת R סופי.

ג. רשות: הראו שעבור $R = \mathcal{O}_D$ הפונקציה הזו מתלכדת עם הנורמה שפגשנו בכיתה.

שאלה 5. הוכיחו $\mathbb{Z}[i]/\langle 3+i \rangle \cong \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ והסיקו כי $3+i \in \mathbb{Z}[i]$ אינו ראשוני.
האם $7 \in \mathbb{Z}[i]$ הוא ראשוני?

שאלה 6. יהי R תחום פריקות יחידה. נגדיר לכל $a \in R \setminus \{0\}$ את $\mu(a)$ להיות מספר הגורמים האי פריקים בפירוק של a ב-R. זה מוגדר היטב מפני ש-R הוא תחום פריקות יחידה.

יהיו $a, b \in R \setminus \{0\}$ כך ש-$a|b$. הוכיחו $\mu(a) \leq \mu(b)$ ושיש שיוויון אם ורק אם $a \sim b$. בפרט, a הפיך אם ורק אם $\mu(a) = 0$.

שאלה 7. יהי F שדה. לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $R_n = F\left[x^{1/n!}\right]$. למשל $R_1 = F[x]$ ו-$R_2 = F[x^{1/2}]$. שימו לב שמתקיים

$$R_1 \subseteq R_2 \subseteq R_3 \subseteq \ldots$$

(למה? כי בשלב n מוסיפים ל-R_{n-1} איבר t שמקיים $t^n = x^{1/(n-1)!}$), ונסתכל על החוג שהוא האיחוד $R = \bigcup_n R_n$.

א. הוכיחו שלכל $0 < r \in \mathbb{Q}$ מתקיים $x^r \in R$. השתכנעו שאיברי R הם סכומים סופיים מהצורה $\sum a_i x^{r_i}$ עבור $a_i \in F$ ו-$0 < r_i \in \mathbb{Q}$.

ב. הוכיחו כי R אינו תחום אטומי (תחום פריקות). רמז: הראו שאם $y \in R$ הוא מחלק אמיתי של x, אז הוא מן הצורה $\pm x^r$ עבור $0 < r < 1$, ואילו $\pm x^r$ פריק.

ג. הראו שלכל $n, m \in \mathbb{N}$ החוגים R_n, R_m איזומורפיים, אבל R לא איזומורפי אליהם.

שאלה 8. רשות: יהי F שדה. הוכיחו שבחוג $F[x]$ יש אינסוף איברים ראשוניים.
רמז: הוכחה המיוחסת לאוקלידס.

שאלה 9. רשות: מספר $\alpha \in \mathbb{C}$ נקרא שלם אלגברי אם קיים פולינום מתוקן $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ כך ש-$f(\alpha) = 0$. את אוסף השלמים האלגבריים נסמן $\mathcal{A}$.

א. הוכיחו כי $\mathcal{A}$ הוא תת־חוג של $\mathbb{C}$.

ב. הוכיחו שלכל $\alpha \in \mathcal{A}$ גם $\sqrt{\alpha} \in \mathcal{A}$.

ג. הוכיחו כי $\mathcal{A}$ איננו חוג אטומי.

בהצלחה!