מערך תרגול 9 מופשטת 3

תרגיל 9.1 יהי $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ פולינום אי פריק מדרגה p עם $p-2$שורשים ממשיים ו 2 שורשים מרוכבים שאינם ממשיים (שורשים אלה בהכרח צמודים). נסמן ב E את שדה הפיצול שלו. הוכיחו כי

$$\mathrm{Gal}(E/F) \cong S_p$$

פתרון: כבר ראינו שחבורת גלואה משוכנת בתוך S_p. בנוסף ברור ש

$$p \mid [E:\mathbb{Q}] = |\,\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})|$$

לפי משפט קושי זה אומר שיש בחבורת גלואה איבר מסדר p. איבר כזה חייב להיות מחזור באורך p. כמו כן, הצמוד המרוכב הוא איבר בחבורת גלואה. הוא מחליף את שני השורשים המרוכבים ומקבע את השאר. ולכן השיכון ל S_p שולח אותו לחילוף. חילוף ומחזור באורך p יוצרים את כל S_p ולכן

$$\mathrm{Gal}(E/F) \cong S_p$$

כנדרש.

תרגיל 9.2 שימוש לחבורת גלואה. תהי K/F הרחבת גלואה עם חבורת גלואה G. ויהי $a \in K$.

נסמן

$$\mathrm{orb}(a) = \{\varphi(a) \mid \varphi \in G\}$$

(הנקודה היא שזו קבוצה ולכן אין חזרות) - זה בדיוק המסלול של a תחת הפעולה של חבורת גלואה. הוכיחו כי הפולינום המינימלי של a הוא

$$m_a(x) = \prod_{b \in \mathrm{orb}(a)} (x-b)$$

פתרון: מצד אחד $\varphi(a)$ תמיד שורש של הפולינום המינימלי של a ולכן

$$\prod_{b \in \mathrm{orb}(a)} (x-b) \mid m_a$$

כמו כן נזכור ש m_a ספרבילי ולכן אין לו שורשים כפולים. כעת נשאר להוכיח שאין לm_a שורשים נוספים. נשים לב ש K מפצל את m_a ולכן לכל שורש c של m_a יש $\varphi \in G$ כך ש $\varphi(a) = c$ (טרנזיטיביות על השורשים של פולינום אי פריק וכו'). ולכן כל שורש c של m_a נמצא בתוך $\mathrm{orb}(a)$.

תרגיל 9.3 נביט על ההרחבה $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})/\mathbb{Q}$. מצאו את הפולינום המינימלי של $a = \sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$ (לפחות כפירוק לשורשים). מה הדרגה שלו?

פתרון: נשתמש במשפט הקודם. נזכור שחבורת גלואה של ההרחבה היא $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. נסמן את האיברים שלה ב

$$\{\mathrm{id}, \theta, \tau, \theta\tau\}$$

כאשר

$$\theta(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}, \quad \theta(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$$

$$\tau(\sqrt{2}) = \sqrt{2}, \quad \tau(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$$

נמצא את המסלול של a

$$\mathrm{id}(a) = \sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$$

$$\theta(a) = -\sqrt{2} - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{6}$$

$$\tau(a) = \sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{6}$$

$$\theta\tau(a) = -\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$$

הם כולם שונים כי כזכור $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ הוא בסיס עבור המרחב הוקטורי $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ מעל $\mathbb{Q}$.ולכן הפולינום המינימלי הוא

$$(x-(\sqrt{2}-3\sqrt{3}+2\sqrt{6}))(x-(-\sqrt{2}-3\sqrt{3}-2\sqrt{6}))(x-(\sqrt{2}+3\sqrt{3}-2\sqrt{6}))(x-(-\sqrt{2}+3\sqrt{3}-2\sqrt{6}))$$

ודרגתו 4.

הערה 9.4 שווה לציין את הנקודה הבאה: נגיד שהיינו שואלים מה הפולינום המינימלי של $\sqrt{6}$? והיינו משתמשים בשיטה לעיל. היינו מגלים ש

$$\mathrm{orb}(\sqrt{6}) = \{\pm\sqrt{6}\}$$

ולכן הפולינום המינימלי הוא $x^2 - 6$. כפי שאנחנו כבר יודעים.

תרגיל 9.5 חשבו את חבורת גלואה של $E/\mathbb{Q}$. כאשר E שדה הפיצול של $x^4 - 4x^2 - 1$.

פתרון: כמובן שזו הרחבת גלואה. נשים לב שהשורשים של הפולינום הם $\pm\sqrt{2 \pm \sqrt{5}}$ (קל לחשב). קל לוודא ש $x^4 - 4x^2 - 1$ אי פריק.

די קל לבדוק ש

$$[E : \mathbb{Q}] = 8$$

ולכן יש 8 איברים בחבורת גלואה. ננסה להבין מה החבורה לפי הפעולה על השורשים. נמספר את השורשים $1,2,3,4$ לפי הסדר את השורשים $\sqrt{2+\sqrt{5}}, -\sqrt{2+\sqrt{5}}, \sqrt{2-\sqrt{5}}, -\sqrt{2-\sqrt{5}}$.

כל אוטומורפיזם נקבע לפי מה שהוא עושה ל

$$\sqrt{2+\sqrt{5}}, \sqrt{2-\sqrt{5}}$$

כמובן שיש אוטומורפיזם טריויאלי ששולח

$$\sqrt{2+\sqrt{5}} \to \sqrt{2+\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{2-\sqrt{5}} \to \sqrt{2-\sqrt{5}}$$

האם יש עוד אוטומורפיזם φ_1 שמקיים $\varphi_1(\sqrt{2+\sqrt{5}}) = \sqrt{2+\sqrt{5}}$?

אם כן, נשים לב שהוא יקבע את כל $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}})$ ולכן הוא יהיה שייך לחבורת גלואה $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}}, \sqrt{2-\sqrt{5}})/\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}}))$. הגודל של חבורת גלואה הזאת הוא 2 כי הפולינום האי פריק של $\sqrt{2-\sqrt{5}}$ מעל $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}})$ הוא

$$x^2 - (2-\sqrt{5})$$

(נשים לב ש $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}})$. ולכן יש 2 אוטומורפיזמים של E שמקבעים את $\sqrt{2+\sqrt{5}}$אחד מהם הוא כמובן ה id אבל השני חייב לשלוח

$$\sqrt{2-\sqrt{5}} \to -\sqrt{2-\sqrt{5}}$$

כי הוא חייב לשלוח שורש לשורש.נסמן את האיבר הזה ב φ_1 ונשים לב שהוא מקביל לתמורה (34)משיקול דומה לגמרי קיים גם אוטומורפיזם φ_2 המקיים

$$\varphi_2(\sqrt{2-\sqrt{5}}) = \sqrt{2-\sqrt{5}}$$

ו

$$\varphi_2(\sqrt{2+\sqrt{5}}) = -\sqrt{2+\sqrt{5}}$$

שהוא מקביל לתמורה (12).

היות שחבורת גלואה פועלת טרנזיטיבית על שורשי פולינום אי פריק נקבל שיש איבר בחבורת גלואה, נסמנו φ_3 כך ש

$$\varphi(\sqrt{2+\sqrt{5}}) = \sqrt{2-\sqrt{5}}$$

כמובן ש

$$\varphi(-\sqrt{2+\sqrt{5}}) = -\sqrt{2-\sqrt{5}}$$

אבל מהו

$$\varphi(\sqrt{2-\sqrt{5}}) =?$$

נשים לב ש

$$\varphi_3(2-\sqrt{5}) = \varphi_3(4-(\sqrt{2+\sqrt{5}})^2) = 4-(2-\sqrt{5}) = 2+\sqrt{5}$$

ולכן בהכרח

$$\varphi(\sqrt{2-\sqrt{5}}) = \pm\sqrt{2-\sqrt{5}}$$

אם נסתכל על התמורה שכל אחד מהם יוצר נראה שהתמורה היא $(13)(24)$ או (1324)

בכל מקרה כיוון שאנחנו כבר יודעים ש $(12),(34)$ בחבורה שלנו כל אחד מהם שנוסיף ייצר גם את השני

$$(1324) = (13)(24)\cdot(34)$$

$$(13)(24) = (1324)\cdot(34)$$

בכל מקרה אם נסתכל על התמורות האלה נראה שהן פורשות את D_4, חבורת הסימטריות של ריבוע. שהיא חבורה בגודל 8 וזוהי חבורת גלואה.