תרגיל 9 בפונקציות מרוכבות

1. מצאו את כל הפונקציות השלמות המקיימות $f''(\frac{1}{n!})+f(\frac{1}{n!})=0$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

2. תהינה $f_1(z),\cdots,f_m(z)$ מספר סופי של פונקציות אנליטיות ב $A=\{z\mid |z|\leq 1\}$ ונתון כי לכל $z\in A$

$$f_1(z)\cdots f_m(z)=0$$

הוכיחו כי לפחות אחת מהפונקציות האלה היא פונקצית האפס.

3. מצאו את כל הפונקציות השלמות המקימות $f(f(z))=f(z)$.

4. מצאו את כל הפונקציות האנליטיות ב $\{z\mid |z|<2\}$ המקיימות ש $f(1-\frac{1}{n})=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

5. מצאו את כל נקודות המקסימום (הגלובאליות) של הפונקציה

$$f(z)=z^2-3z+2$$

בעיגול $\{z\mid |z|\leq 1\}$
הדרכה: כתבו $z=x+iy$ (והשתמשו כמובן בעקרון המקסימום).

6. האם קיימת פונקציה שלמה המקיימת $|f(z)|=|1-|z||$ לכל $z\in\mathbb{C}$.

7. נניח ש $f(z)$ פונקציה שלמה כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים

$$|f(\frac{1}{n})|\leq\frac{1}{n^n}$$

הוכיחו ש $f(z)=0$. רמז: הוכיחו כי $z=0$ הוא אפס ומצאו את הסדר שלו.