פתרונות

שאלה 1א

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x\cos x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin x\cos x}{a^2(1-\sin^2 x) + b^2\sin^2 x}\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\sin x\cos x}{a^2 + (b^2-a^2)\sin^2 x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

נבצע הצבה $t=\sin x$ כלומר $\mathrm{d}t = \cos x\mathrm{d}x$ ולכן האינטגרל שווה ל:

$$\int \frac{t}{a^2+(b^2-a^2)t^2}\mathrm{d}t$$

עכשיו נציב $z=t^2$ כלומר $\mathrm{d}z = 2t\mathrm{d}t$ ולכן האינטגרל שווה ל:

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{a^2+(b^2-a^2)z}\mathrm{d}z$$

אם $a^2 \neq b^2$ אז האינטגרל הזה שווה ל

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\ln|a^2+(b^2-a^2)z| + c &= \frac{1}{2}\ln|a^2+(b^2-a^2)t^2| + c \\ &= \frac{1}{2}\ln|a^2+(b^2-a^2)\sin^2 x| + c\end{aligned}$$

אם $a^2 = b^2$ אז האינטגרל הוא בעצם

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{a^2}\mathrm{d}z = \frac{z}{2a^2} + c = \frac{\sin^2 x}{2a^2} + c$$

שאלה 1ב

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{e^t-1}}$$

נציב $z = e^t - 1$ כלומר $\mathrm{d}z = e^t\mathrm{d}t$ כלומר $\mathrm{d}z = (z+1)\mathrm{d}t$ ולכן $\frac{1}{z+1}\mathrm{d}z = \mathrm{d}t$ ולכן האינטגרל הוא בעצם

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{(z+1)\sqrt{z}}$$

עכשיו נבצע הצבה $x^2 = z$ (נשים לב שתחום ההגדרה שלנו הוא $z = e^t - 1 \geq 0$ כלומר z תמיד חיובי ולכן אין בעיה ההצבה הזו) ולכן

$$2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}z$$

כלומר האינטגרל הוא

$$\int \frac{2x\mathrm{d}x}{(x^2+1)\sqrt{x^2}}$$

שוב $\sqrt{x^2}=x$ כי x חיובי ולכן

$$\int \frac{2x\mathrm{d}x}{(x^2+1)\sqrt{x^2}} = \int \frac{2\mathrm{d}x}{(x^2+1)} = 2\arctan x + c = 2\arctan\sqrt{z} + c$$
$$= 2\arctan\sqrt{e^t-1} + c$$

שאלה 3א

לא. ניקח את

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

אז

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

מתכנס לפי דיריכלה אבל

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$$

מתבדר.(תזכורת: זה בגלל ש:

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1-\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{2x}\mathrm{d}x - \int_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x$$

שזה ביטוי שבו האינטגרל הימני מתכנס לפי דיריכלה והשמאלי מתבדר ולכן בסך הכל יש התבדרות)

שאלה 3ב

כן. נציב $t=x^2$ כלומר $\mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x = 2\sqrt{t}\mathrm{d}x$ ונקבל:

$$\int_1^\infty f(x^2)\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{f(t)}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

אבל האינטגרל הזה מתכנס לפי דיריכלה ($\frac{1}{\sqrt{t}}$ מונוטונית יורדת, $\int_1^\infty f(t)\mathrm{d}t$ מתכנס ולכן בוודאי חסום).

שאלה 4

נחשב לפי הנוסחא

$$L=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x$$

במקרה שלנו $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ ולכן

$$f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

ולכן

$$\begin{aligned}L&=\int_0^1\sqrt{1+\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{e^{2x}+2+e^{-2x}}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{(e^x+e^{-x})^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 e^x+e^{-x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}(e-\frac{1}{e})\end{aligned}$$

שאלה 5

נפצל את הטור ל

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n+4^n}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n+4^n}\frac{1}{x^n}$$

נסתכל על הטור השמאלי שהוא טור חזקות ונחשב את רדיוס ההתכנסות שלו עם מבחן קושי:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{3^n+4^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt[n]{3^n+4^n}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

(תזכורת: $\sqrt[n]{3^n+4^n}\to 4$ לפי משפט הסנדויץ כי הסדרה גדולה מ 4 וקטנה מ $\sqrt[n]{2}\cdot 4$)
ולכן רדיוס ההתכנסות הוא 2.
מה קורה בקצוות? אם $x=2$ אז נקבל טור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{3^n+4^n}$$

קל לראות ש

$$\frac{4^n}{3^n+4^n}=\frac{1}{(\frac{3}{4})^n+1}\to 1$$

כלומר האיבר הכללי בכלל לא מתכנס ל 1 ולכן הטור מתבדר.
בדומה קל לראות שיש התבדרות כאשר $x = -2$. כלומר תחום ההתכנסות של הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n + 4^n} x^n$$

הוא $(-2, 2)$.
עכשיו נסתכל על הטור הימני

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n + 4^n} \frac{1}{x^n}$$

אם נציב $y = \frac{1}{x}$ נקבל את הטור המקורי, שהוא מתכנס ב $-2 < y < 2$, כלומר הטור שלנו מתכנס עבור

$$-2 < \frac{1}{x} < 2$$

כלומר

$$|x| > \frac{1}{2}$$

לסיכום: בתחום $|x| \geq 2$ הטור השני מתכנס והראשון לא ולכן בסך הכל הם מתבדרים.
בתחום $|x| \leq \frac{1}{2}$ הטור הראשון מתכנס והשני לא ולכן בסך הכל הם מבדרים.
בתחום $\frac{1}{2} < |x| < 2$ שני הטורים מתכנסים ולכן הסכום שלהם גם מתכנס.

שאלה 6

יהי $\epsilon > 0$. צריך למצוא $\delta > 0$ כך שאם

$$|x - y| < \delta$$

אז

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

היות שסדרת הפונקציות מתכנסת במ"ש, קיים n_0 כלשהוא, כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים

$$\forall x \in (a, b) \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{3}$$

הפונקציה f_{n_0} היא בעצמה רציפה במ"ש (לפי הנתון) ולכן קיים δ כך שאם $|x - y| < \delta$ אז מתקיים

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| < \frac{\epsilon}{3}$$

עבורδ זה מתקיים גם שאם $|x - y| < \delta$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y) + f_{n_0}(y) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| = \epsilon \end{aligned}$$

ולכן f רציפה במ"ש כנדרש.