אלגברה ליניארית 89-119 סמסטר א׳,מועד א, תשע״ו

מרצה : ד״ר יונתן בק.
תאריך : 26.2.2015
משך המבחן : שעתיים וחצי.
חומר עזר : מחשבון פשוט.
הוראות : ענה על השאלה הראשונה ושלוש מארבע השאלות הבאות. כל שאלה שווה 25 נקודות. מכיוון שהמחברות ייסרקו, כל פתרון חייב להיכתב במחברת בלבד. יש לרשום תשובות מנומקות. בהצלחה!!!

1. [חובה] נתונה מערכת המשוואות :

$$ax_1 + ax_2 - ax_3 = a$$
$$-x_1 + 4x_2 - ax_3 = 0$$
$$2x_1 - 8x_2 + 4x_3 = 1$$

a. עבור אלו ערכים של a יש למערכת אינסוף פתרונות, פתרון יחיד, או שאין פתרון.
b. כאשר למערכת יש אינסוף פתרונות אילו מהמשתנים יכולים להיות חופשיים.
c. הציגו את הפתרון הכללי.

1. נתון ש $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$.

a. חשב את $\det(A)$, הדטרמיננטה של A .
b. מצא מטריצת הקופקטורים של A , (שמסומן $\operatorname{adj}(A)$ או C).
c. בשימוש נוסחת הקופקטורים, מצא את A^{-1} ? פתרון בשיטה אחרת מקבל חצי ניקוד.
d. בשימוש A^{-1} מצא הפתרון למערכת $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. (אין להשתמש בדירוג למציאת הפתרון).

2. תהי S הקבוצה הבאה $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$.

a. האם S קבוצה אורתונורמלית?

b. מה ההיטל של $\begin{bmatrix}2\\0\\-2\end{bmatrix}$ על הישר דרך הווקטור $\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$.

c. השתמש בתהליך גרם-שמידט להעביר את S לקבוצה אורתונורמלית.

d. שני הווקטורים בסעיף b. הם בסיס למישור W ב $\mathbb{R}^3$ המוגדר על ידי $W=\text{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\-2\end{bmatrix}\right\}$. מצא ווקטור שלישי $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ שניצב לתת-המרחב W.

רמז: השתמשו בתהליך גרם-שמידט.

3. תהי $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\1 & 3\end{pmatrix}$.

a. מצא את הערכים העצמיים של A ועבור כל אחד מהם מצא ווקטור עצמי עבורו.

b. מצא מטריצה S הפיכה ו D אלכסונית כך ש $A=SDS^{-1}$.

c. בעזרת S ו D, מצא A^{25}.

d. מצא מטריצה B כך ש $B^2=A$.

4. ענה אמת/שקר לכל סעיף. כל סעיף שווה 4 נקודות. רשום את תשובתך במחברת.

a. כל קבוצה אורתוגונלית היא בלתי תלויה ליניארית.

b. שני ווקטורים $v,w\in\mathbb{R}^n$, שונים מ 0, הם ניצבים אם ורק אם $w^Tv=0$.

c. עבור שתי מטריצות A,B $n\times n$, $\det(A+B)=0$ אם רק אם $A=-B$.

d. לכל שתי מטריצה A $m\times n$ ו B $n\times p$ מתקיים של $(AB)^T=A^TB^T$.

e. נתון ש $A^{-1}B+A^2=0$. מתקיים ש A הפיכה אם ורק אם B הפיכה.