בס"ד

אוניברסיטת בר-אילן
מבחן בקורס אלגברה מופשטת 1 (סמסטר קיץ)
מס' : 211-88- 05/07
המרצים: מיכאל מגרל ו רוני ביתן
תאריך: 24.09.09
מועד ב'
חומר עזר: רק מחשבון
משך המבחן: שעתיים

פתרון:

שאלה 1.

תהא $G = S_4$ הפועלת על הקבוצה $X = \{1,2,...,4\}$ ע"י: $g * x = g(x)$.

א. חשב את המייצב A של $x = 2$.

המייצב של $x = 2$ הוא קבוצת התמורות שלא מזיזות את 2 והן:

$\{id,(13),(14),(34),(134),(143)\}$.

ב. האם $A \lhd G$? נמק.

לא – למשל: $(12)(13)(12) = (23) \notin A$.

ג. האם מחלקת הצמידות של כל $id \neq \alpha \in A$ מוכלת בתוך A?

לא – מחלקת הצמידות ב-S_4 מכילה את התמורות מאותו המבנה.

עבור $\alpha = (13)$ הצמוד (12) לא שייך ל-A.

ד. מהי הדרגה של A (מס' האיברים המינימלי שיכולים ליצור יחד את A) ?

חבורה בת 6 איברים היא איזומורפית ל- C_6 או ל-D_3.

במקרה שלנו קל לראות כי A אינה אבלית ולכן $A \simeq D_3$. מכאן שדרגתה היא 2.

שאלה 2.

תהא G חבורת p הפועלת על קבוצה X. הראה ש:

א. אם p אינו מחלק את $|X|$ אז בהכרח קיימת לפחות נקודת שבת אחת.

X הוא איחוד זר של המסלולים. גודל כל מסלול מחלק את $|G|$ כלומר הוא חזקה של p. לכן:

$|X|=\sum_i p^{r_i}$. אבל p אינו מחלק את $|X|$ ולכן בהכרח לפחות אחת החזקות r_i שווה לאפס, כלומר ישנו לפחות מסלול אחד באורך 1. מסלול כזה הוא נקודת שבת.

ב. כל מייצב של איבר ב- X הוא ת"ח פתירה.

כל מייצב הוא ת"ח של G ולכן גם הוא חבורת-p וכל חבורת-p היא פתירה.

ג. אם $X=G$ והפעולה היא ההצמדה אז יש בהכרח יותר מנקודת שבת אחת.

אם הפעולה היא ההצמדה אז נקודות השבת הן האיברים שמתחלפים עם כולם, כלומר איברי המרכז. המרכז בחבורת p אינו טריוויאלי (נובע מנוסחת המחלקה). כלומר יש בו יותר מאשר איבר אחד.

שאלה 3.

א. האם קיים מונומורפיזם מ-$\mathbf{GL}_3(\mathbb{Q})$ ל-$\left(\mathbb{Q}^{12},+\right)$?

לא, שכן אם היה, אזי התמונה של אותו מונומורפיזם היתה תת-חבורה לא אבלית בתוך חבורת הטווח שהיא כולה אבלית. סתירה.

ב. תהא $G=\left(\langle n\rangle,+\right)$ עבור: $1<n\in\mathbb{N}$. האם קיים אפימורפיזם מ-G ל-$\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n$?

לא, שכן תמונה הומומורפית של חבורה ציקלית היא חבורה ציקלית וככזו היא אינה יכולה לכסות את כל חבורת הטווח שהיא מדרגה 2. (כיוון ש: $(n,n)=n>1$ החבורה $\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n$ אינה ציקלית).

ג. תהא G חבורה מסדר 21 כך שישנם יותר משני איברים מסדר 3.

הראה כי G אינה אבלית אבל פתירה.

אם G אבלית אז כל ת"ח שלה היא נורמלית. אך נתון כי יש יותר משני איברים מסדר 3 כלומר יש יותר מחבורת 3-סילו אחת, ומתוך משפט סילו-2 ניתן להסיק כי הן לא נורמליות.

לעומת זאת מתוך משפט סילו 3 נובע במקרה שלנו כי יש רק חבורת 7-סילו אחת וזו אם כן נורמלית.

נסמנה ב-H_7 ונקבל את הסדרה הנורמלית: $G\rhd H_7\rhd\{e\}$. סדרי המנות בסדרה זו הם $3,7$ כלומר המנות הן ציקליות ולכן אבליות. אם כן זו סדרת הרכב והחבורה היא פתירה.

שאלה 4.

א. הוכח שבכל אגודה סופית $(X,\cdot)$ קיים איבר $a\in X$ כך ש: $a^2=a$.

ראה בהרצאה.

תן דוגמה נגדית במקרה שהאגודה היא אינסופית. פתרון: באגודה $(\mathbb{N},+)$ אין שום איבר אידימפוטנט.

ב. פתור באמצעות משפט אוילר את המשוואה:

$$9999x \equiv 3737373737^{9999} + 2009 \bmod 40.$$

נפשט תחילה את הביטוי 3737373737^{9999} מודולו 40.

אלף מתחלק ב-40 ולכן נרשום: $737^{9999} \equiv 17^{9999}$ או: $17^{10000} \cdot 17^{-1} \equiv 17^{-1}$.

מתוך אלגוריתם אוקלידס בכיוון ההפוך נקבל: $1 = 3 \cdot 40 - 7 \cdot 17$ כלומר: $17^{-1} = -7$.

לגבי הביטוי השני: כאן ברור כי השארית היא 9 ולכן נוכל לרשום את המשוואה:

$$9999x = 10000x - x \equiv -x \equiv 2 \bmod 40$$

כלומר $x \equiv -2 \equiv 38 \pmod{40}$.

ג. מצא את מספר המונומורפיזמים מהחבורה: $G = \left\langle cis36^\circ \right\rangle$ לתוך: $\Omega_{25} \times \mathbb{Z}_4$.

עשר הזזות לאורך מעגל היחידה בזווית של $36^\circ = \frac{\pi}{5}$ יגרמו למספר אחד לחזור למקומו.

כלומר חבורת המקור היא איזומורפית ל- C_{10}.

כיוון ש: $(4,25) = 1$ חבורת הטווח היא איזומורפית ל- C_{100}. בחבורה ציקלית זו יש רק תת-חבורה אחת מסדר 10 ועל כן רק היא יכולה להיות התמונה של חבורת המקור.

כדי שההעתקה תהיה אכן חח"ע צריך להעביר את היוצר של C_{10} ליוצר כלשהו של תת-החבורה הנ"ל. (תמונת כל שאר האיברים יקבעו בהתאם). יש $\varphi(10) = 4$ כאלו תמונות אפשריות כאלו ליוצר זה ולכן זהו מספר המונומורפיזמים.

שאלה 5.

נתייחס לחבורה הסימטרית S_p כאשר p הוא מספר ראשוני.

א. כמה איברים מסדר p יש בחבורה?

כיוון ש- p הוא ראשוני, איבר מסדר p בתוך S_p יכול להיות רק עגיל באורך p. כאלו יש $(p-1)!$.

ב. חשב עפ"י סעיף א' את מספר תתי-החבורות מסדר p בתוך S_p.

כיוון שכל החבורות מסדר ראשוני הן זרות עד כדי איבר היחידה, סך האיברים שהן תורמות הוא: $1+n_p\left(p-1\right)$ כאשר n_p הוא מספר תתי-החבורות הללו. כל איבר בת"ח חבורה שכזו הוא מסדר p (שוב כיוון ש- p ראשוני). במקרה שלנו אם נוסיף גם את איבר היחידה נקבל:

$$1+n_p\left(p-1\right)=1+\left(p-1\right)! \;\Rightarrow\; n_p=\left(p-2\right)!$$

ג. בעזרת סעיף ב ומשפט Sylow 3 הסק ש: $(p-1)!\equiv\left(p-1\right)\bmod p$.

כיוון שבסדר החבורה $\left|S_p\right|=p!$ הגורם p מופיע בחזקת אחד, מספר החבורות-p שווה לזה של חבורות p-סילו. עפ"י משפט סילו 3: $n_p=\left(p-2\right)!=1+pk,\ k\in\mathbb{N}\bigcup\left\{0\right\}$

כלומר $\left(p-2\right)!\equiv 1\bmod p$. כעת נותר להכפיל את שני האגפים ב-$p-1$ ולקבל את התוצאה הדרושה. האם זה מוכר לכם כאחד מהמשפטים? - כן זהו כיוון אחד של משפט Wilson.

שאלה 6.

א. הוכח כי החבורה $\Omega_\infty=\left\{z\in\mathbb{C}\mid\exists n\in\mathbb{Z}:z^n=1\right\}$ של שורשי יחידה אינה נוצרת סופית.

לכל תת-קבוצה סופית של איברים קיים $n\in\mathbb{N}$ מספיק גדול כך שכולם יהיו מוכלים בתוך Ω_n.

מתוך סגירות גם כל מה שהם יוצרים נמצא שם. והרי זו חבורה סופית בסתירה לאינסופיות של Ω_∞.

הוכח:

ב. $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\simeq\mathbb{T}$. נגדיר: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{T}$ ע"י: $\theta\mapsto cis\left(2\pi i\theta\right)$. זהו אפימורפיזם והגרעין הוא: $\mathbb{Z}$.

מכאן עפ"י משפט האיזומורפיזם הראשון נקבל את התוצאה הדרושה.

ג. $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\simeq\Omega_\infty$. נגדיר: $f:\mathbb{Q}\to\Omega_\infty$ ע"י: $r\mapsto cis\left(2\pi ir\right)$. גם הפעם זהו אפימורפיזם וגם הפעם הגרעין הוא: $\mathbb{Z}$.

ד. $\mathbb{R}/\mathbb{Q}\simeq\mathbb{T}/\Omega_\infty$ נובע משני הסעיפים הראשונים ע"י שימוש במשפט האיזומורפיזם השלישי:

$$\mathbb{R}/\mathbb{Q}\simeq{}^{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}\big/_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}\simeq\mathbb{T}/\Omega_\infty$$

(כאשר $\mathbb{R},\mathbb{Q},\mathbb{Z}$ הם חבורות של ממשיים, רציונליים, שלמים ו- $\mathbb{T}=\left\{z\in\mathbb{C}^*:\|z\|=1\right\}$).