המחלקה למתמטיקה - אוניברסיטת בר-אילן

טופולוגיה – 01/05 - 222 - 88 – סמסטר ב' תשע"ג

מבחן מועד א'

יום ב', ט"ו באב תשע"ג, 22.7.13

מרצים: מיכאל מגרל, טל נוביק

הנחיות:

א. אין להשתמש בכל חומר עזר.

ב. עליך לענות על 4 מתוך 5 השאלות הבאות. אם ענית על כל 5 השאלות, עליך לבטל אחת מהן בצורה ברורה, אחרת ייבדקו 4 השאלות הראשונות המופיעות במחברת.

ג. אנא רשום בפינה השמאלית העליונה של כריכת המחברת, מעל המילים "מדור בחינות", את מספרי השאלות שבחרת.

ד. משך המבחן שעתיים וחצי. מותר לקחת דף זה בסוף המבחן.

שים לב: בזמן המבחן אסור שיהיה ברשותך טלפון נייד!

1. יהי M מרחב מטרי קומפקטי, ותהי $A \subseteq M$ תת קבוצה אינסופית. הראה שיש ל A נקודת הצטברות ב M.
(כלומר קיים $x \in M$ כך שלכל $\varepsilon > 0$ יש $a \in A$ המקיים $0 < d(a,x) < \varepsilon$).

2. יהי X מרחב טופולוגי. יהי $\sim$ יחס שקילות על X, ונסמן ב $\hat{X}$ את מרחב המנה של X המתקבל מיחס שקילות זה. תהי $\rho : X \to \hat{X}$ ההעתקה השולחת כל נקודה למחלקת השקילות שלה.

   א. הראה ש ρ רציפה.

   ב. יהי Y מרחב טופולוגי נוסף ותהי $f : \hat{X} \to Y$ פונקציה. הראה ש f רציפה אם"ם $f \circ \rho$ רציפה.

3. יהי $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אוסף כלשהו של מרחבים טופולוגיים.

   א. הראה שאם כל מרחב X_α הוא האוסדורף, אז גם המרחב $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ הוא האוסדורף.

   ב. הראה שאם I הוא אינסופי, ובכל מרחב X_α יש לפחות שתי נקודות, אז המרחב $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ איננו דיסקרטי.

4. כזכור הישר של סורגנפריי הוא הקבוצה $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה שבה קבוצה היא פתוחה אם היא איחוד של קטעים מהצורה $[a,b)$. נסמן ב $\mathbb{R}_\ell$ את הישר של סורגנפריי.

   א. הראה שאם $A \subseteq \mathbb{R}_\ell$ הוא תת מרחב בן יותר מנקודה אחת אז A איננו קשיר.

   ב. נסמן כרגיל ב $\mathbb{R}$ את הישר עם הטופולוגיה הרגילה.
   הראה שפונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_\ell$ היא רציפה אם"ם היא קבועה.

5. כזכור S^1 מסמן את המעגל $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.
תהי $f : S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. הראה שתמונת f היא קטע סגור $[a,b]$.

בהצלחה!

המחלקה למתמטיקה - אוניברסיטת בר-אילן

טופולוגיה – 88 - 222 - 01/05 – סמסטר ב' תשע"ג

מבחן מועד ב'

יום ב', כ"ו בתשרי תשע"ד, 30.9.13

מרצים: מיכאל מגרל, טל נוביק

הנחיות:

א. אין להשתמש בכל חומר עזר.

ב. עליך לענות על 4 מתוך 5 השאלות הבאות. אם ענית על כל 5 השאלות, עליך לבטל אחת מהן בצורה ברורה, אחרת ייבדקו 4 השאלות הראשונות המופיעות במחברת.

ג. אנא רשום בפינה השמאלית העליונה של כריכת המחברת, מעל המילים "מדור בחינות", את מספרי השאלות שבחרת.

ד. משך המבחן שעתיים וחצי. מותר לקחת דף זה בסוף המבחן.

שים לב: בזמן המבחן אסור שיהיה ברשותך טלפון נייד!

1. יהיו M,N מרחבים מטריים, תהי $f:M\to N$, ותהי $a\in M$. הראה ש f רציפה ב a אם"ם לכל סדרת נקודות $\{x_n\}$ ב M המקיימת $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, מתקיים $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$.

2. יהי X מרחב טופולוגי **האוסדורף**, ויהי $A\subseteq X$ תת מרחב **קומפקטי**. הראה ש A היא תת קבוצה סגורה של X.

3. יהיו X,Y שני מרחבים טופולוגיים.

   א. יהיו $A\subseteq X, B\subseteq Y$ קבוצות **סגורות**. הראה ש $A\times B$ סגורה ב $X\times Y$.

   ב. יהיו $A\subseteq X, B\subseteq Y$ קבוצות **כלשהן**. הראה ש $\overline{A\times B}=\overline{A}\times\overline{B}$

   ($\overline{A},\overline{B},\overline{A\times B}$ מסמנים את הסגור ב $X,Y,X\times Y$ בהתאמה).

4. בהינתן קבוצה X, תהי T הטופולוגיה הקו-סופית על X, כלומר $T=\{\varnothing\}\cup\{A\subseteq X : A^C \text{ סופית}\}$.

   א. עבור אילו קבוצות X מתקיים ש (X,T) קשיר.

   ב. עבור אילו קבוצות X מתקיים ש (X,T) האוסדורף.

5. יהיו X,Y שני מרחבים טופולוגיים, ותהי $f:X\to Y$ פונקציה רציפה.

   הגרף של f הוא תת המרחב של $X\times Y$ המוגדר באופן הבא: $\Gamma=\left\{\left(x,f(x)\right):x\in X\right\}$,

   או בלשון אחרת $\Gamma=\left\{(x,y)\in X\times Y : y=f(x)\right\}$.

   הראה ש Γ הומאומורפי ל X.

בהצלחה!