הרצאה 11

תזכורת – $|A|=|B|$ $f: A \to B$ חח"ע ועל

$|A| \le |B|$ $f: A \to B$ חח"ע

- ק.ש.ב.: $|A| \le |B|$, $|B| \le |A|$ $\Leftarrow$ $|A|=|B|$

- חוק אריתמטיקה עוצמות, אי-שוויונות...

אקסיומת הבחירה

אקסיומות של תורת הקבוצות:

① אם לשתי קבוצות יש בדיוק את אותם איברים, אז הן שוות.

② לכל שתי קבוצות יש קבוצה שהיא האיחוד שלהן...

③ לכל קבוצה, קיימת קבוצת החזקה.

⋮

ZF   צֶרמלו-פרנקל

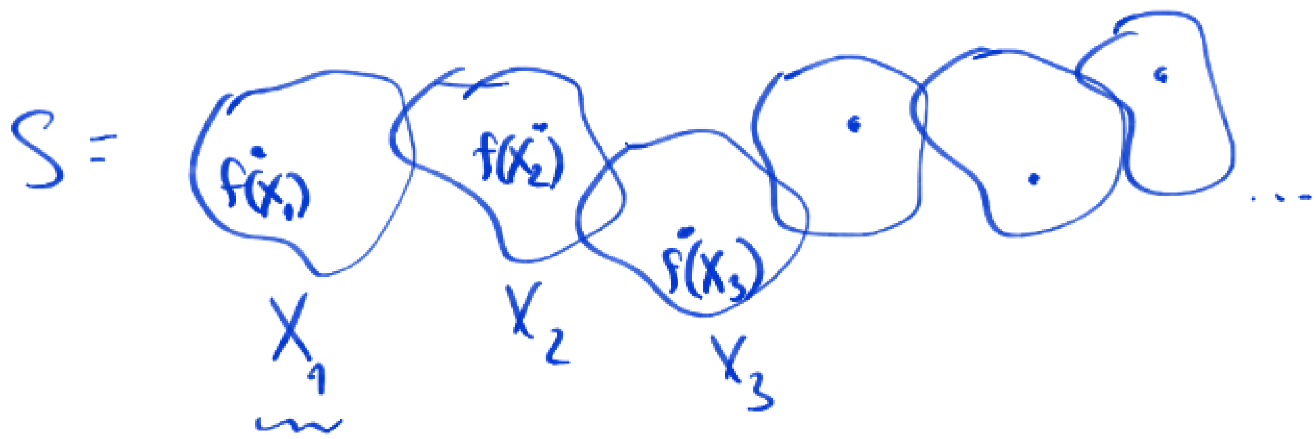
תאוריה   לא ריקה

<u>אקסיומת הבחירה</u>: תהא S קבוצה של קבוצות.
אזי <u>קיימת</u> פונקציה:

$$f : S \longrightarrow \bigcup_{X\in S} X$$

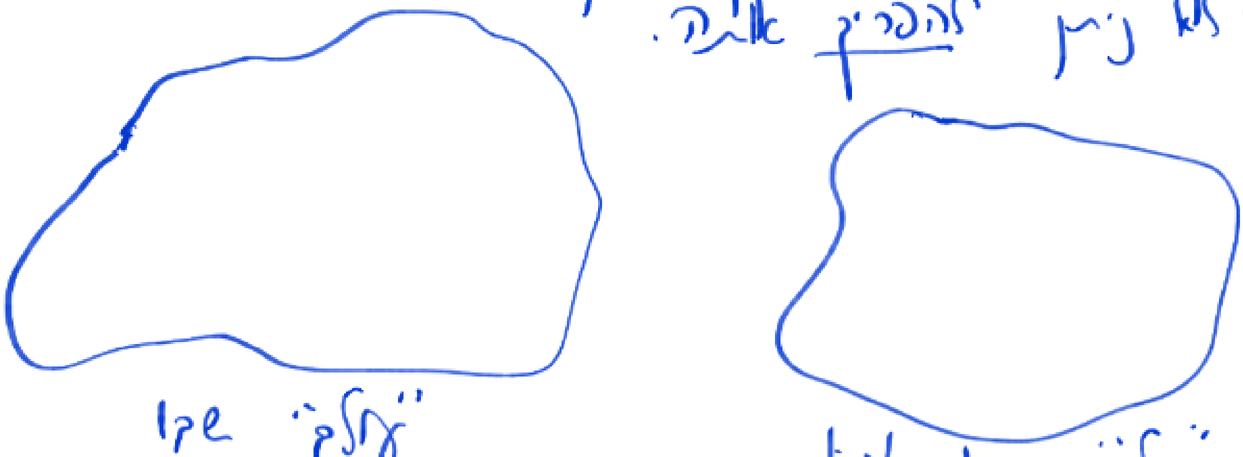
כך ש-

$$\forall X\in S: \ f(X)\in X$$



נשמע "טריוויאלי" בכל זאת - איננה חלק מהאקסיומות הבסיסיות של תורת הקב' (ZF).

הוכחו (גדל, כהן) - לא ניתן <u>להוכיח</u> את אקסיומת הבחירה מתוך האקסיומות הבסיסיות, ולא ניתן <u>להפריך</u> אותה.



"עולם" שבו אקסיומת הבחירה נכונה

"עולם" שבו אקסיומת הבחירה איננה נכונה

↑

בגלל
הקונבנציה.

<u>מתי ניתן להראות שקיימת בחירה, ללא שימוש באקסיומת הבחירה?</u>

- נניח שיש לנו אוסף אינסופי של זוגות נעליים. האם צריך את אקסיומת הבחירה כדי לבחור נעל מכל זוג?

לא - לכל זוג, נבחר את הנעל השמאלית.

- אם נתון לנו יחס סדר על כל קבוצה, שבמסגרתו יש איבר קטן ביותר, ניתן להגדיר פונקציית בחירה

$$f(X) = \text{האיבר הקטן ביותר}$$

- מה אם אוסף הקבוצות S מכיל קבוצה אחת בלבד?

$$S=\{X\}$$

X לא ריקה $\Leftarrow$ $\exists x \in X$, נגדיר:

$f(X)$

$f(X)=x$.

<u>דוגמאות לאי רציונליות:</u>

(1) קיימת תת-קב' $X \subseteq \mathbb{R}$ כך ש-

$$\forall x\neq y \in X,\quad x-y\notin \mathbb{Q}$$

וגם לכל $r\in\mathbb{R}$, יש $x\in X$:

$x-r\in\mathbb{Q}$.

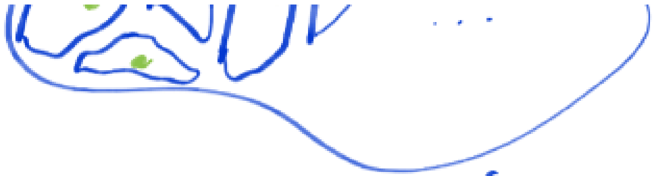
$$X=\left\{\begin{array}{l} 1,\sqrt{2},\sqrt{3},\ldots \\ \pi,\sqrt{\pi},\pi^{4/7},\ldots \\ e,\ldots \\ \vdots \end{array}\right\}$$

<u>הוכחה</u> – נגדיר על $\mathbb{R}$ יח"ש לפי:

$$x\sim y \iff x-y\in\mathbb{Q}$$

זהו אכן יח"ש.

בפרט, $\mathbb{R}=\bigcup_{r\in\mathbb{R}}[r]_\sim$ איחוד מח"ש.



נבחר (בעזרת אקסיומת הבחירה), לכל מח"ש, איבר אחד ממנה, ונגדיר כ- X להיות אוסף האיברים הללו.

ראשית, אם $x_1, x_2 \in X$ שונים, בפרט הם ממח"ש שונות, ולכן

$$x_1 \not\sim x_2$$

דהיינו: $x_1 - x_2 \notin \mathbb{Q}$.

שנית, לכל $r \in \mathbb{R}$, נתבונן במח"ש $[r]_\sim$.

אז, קיים איזשהו איבר ממח"ש זו, נאמר x, ומתקיים:

$$x \sim r \qquad (\text{אולי במקרה } x=r)$$

דהיינו: $x - r \in \mathbb{Q}$.

מ.ש.ל.

$(|A| \le |B|) \qquad (A, B \neq \emptyset)$

(2) $f: A \to B$ חח"ע $\iff$ $g: B \to A$ על

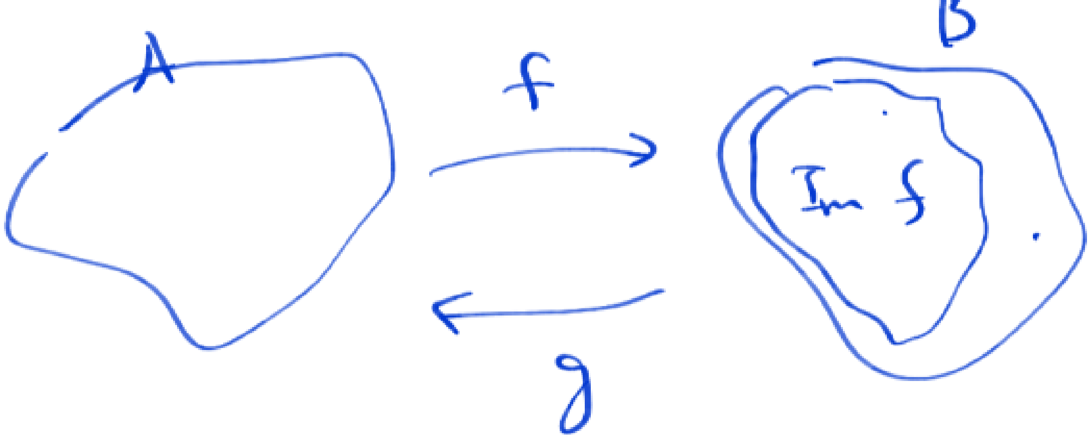
($\Leftarrow$) [טענה שהוכחנו בעבר] נניח $f: A \to B$ חח"ע. נבנה $g: B \to A$ על.

$\exists a \in A \Leftarrow A \neq \emptyset$, נגדיר:

$b \in \operatorname{Im} f$, $f^{-1}(b)$ ← מוגדר היטב, כי f חח"ע.

b∈Im f קיים מקור יחיד $f^{-1}(b)$ ($f^{-1}(b)$, $b \in \operatorname{Im} f$)

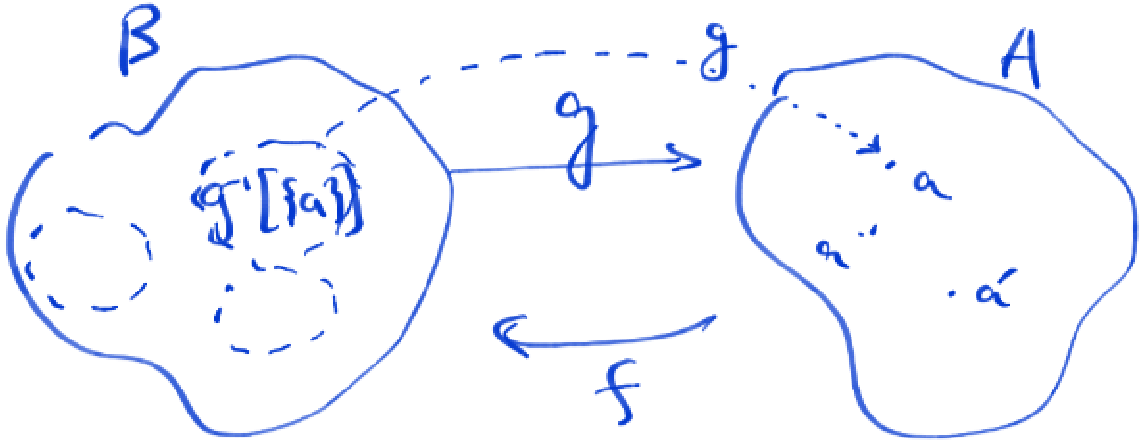
$$g(b) = \begin{cases} a & , b \notin \operatorname{Im} f \end{cases}$$



(תרגיל לבית - להוכיח ש-g על.)

שימו לב - כאן לא השתמשנו באקסיומת הבחירה.

(⇐) נני' $g: B \to A$ על ונבנה פונק' חח"ע: $f: A \to B$.



נבנה את f. יהי $a \in A$, מכיוון ש-g על,

$$\emptyset \neq \{b \in B \mid g(b) = a\} = g^{-1}[\{a\}]$$

ובפרט ניתן לבחור מתוך מנה אחר כלשהו b.

$\Leftarrow$ מצריך את אקסיומת הבחירה!

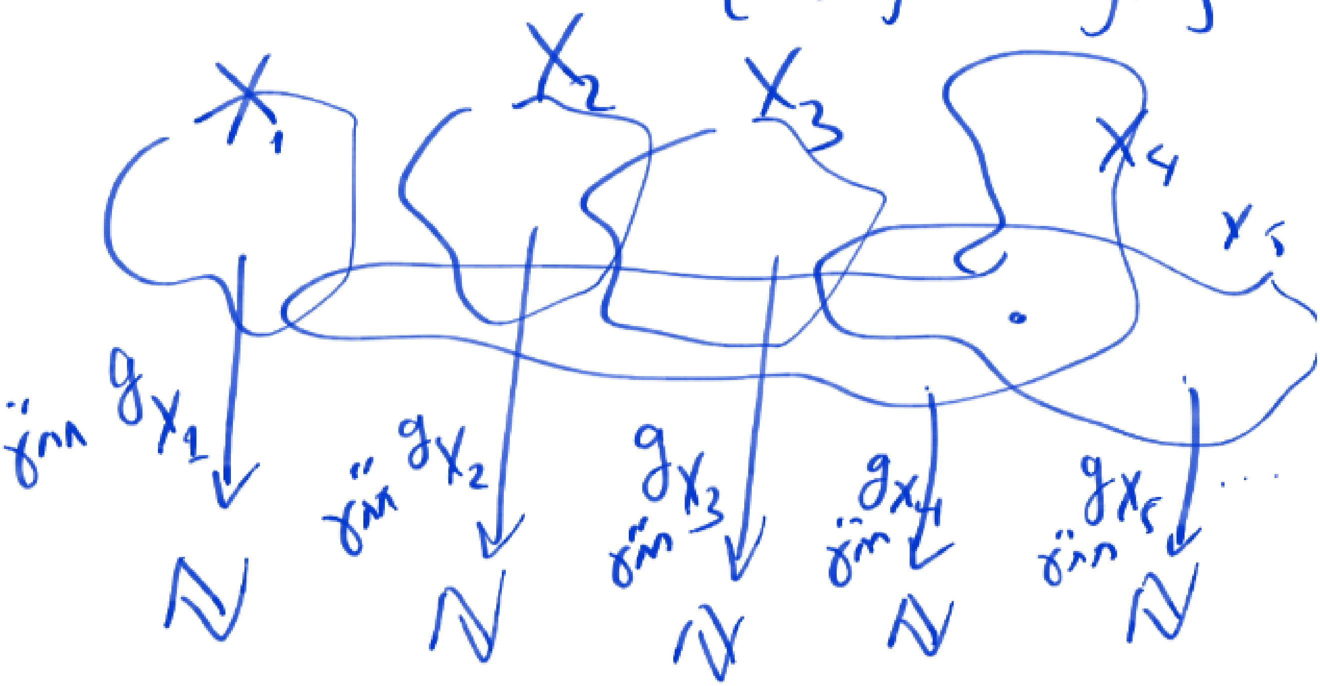
נגדיר: $f(a)=b$.

(f חח"ע - תרגיל.)

מ.ש.ל.

X בת-מנייה: ($|X| \leq \aleph_0$

(3) איחוד בן מנייה של קבוצות מניה הוא בן מנייה.
[טענה שהוכחנו כבר]



$$f : \bigcup_{X \in S} X \longrightarrow S \times \mathbb{N} \ (\longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N})$$
כ"א

$$f(\overset{\text{ש}}{x}) \underset{\text{נבחר}}{=} (X, g_X(x))$$

$X \in S$ כך ש-
$x \in X$

[בעצם, לכל $x \in X$ צריך לבחור נציג מתוך אוסף הקבוצות ששייכות ל-S שאליהן x משתייך!]

באומר, שני יקום מקביל בו אקסיומת הבחירה אינה נכונה, ושם יש איחוד בן מנייה של קב' בנות מנייה שהם אינם בני מנייה!

יתרה מזאת - יש יקום שבו:

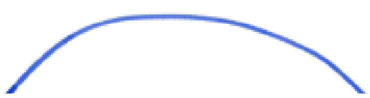
$$\underbrace{\mathbb{R}}_{\text{לא בן מנייה בשום יקום!}} = \bigcup \left(\text{איחוד בן מנייה של קב' בנות מנייה} \right) = \bigcup_{X \in S} X \quad !$$

S קב' בת מנייה של קבוצות.
כל אחת מהן בת מנייה.

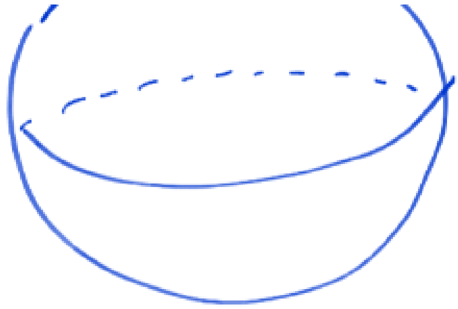
דוגמאות מפורסמות (מאוד):

(1) פרדוקס האוסדורף-בנך-טרסקי (נובע מאקסיומת הבחירה):

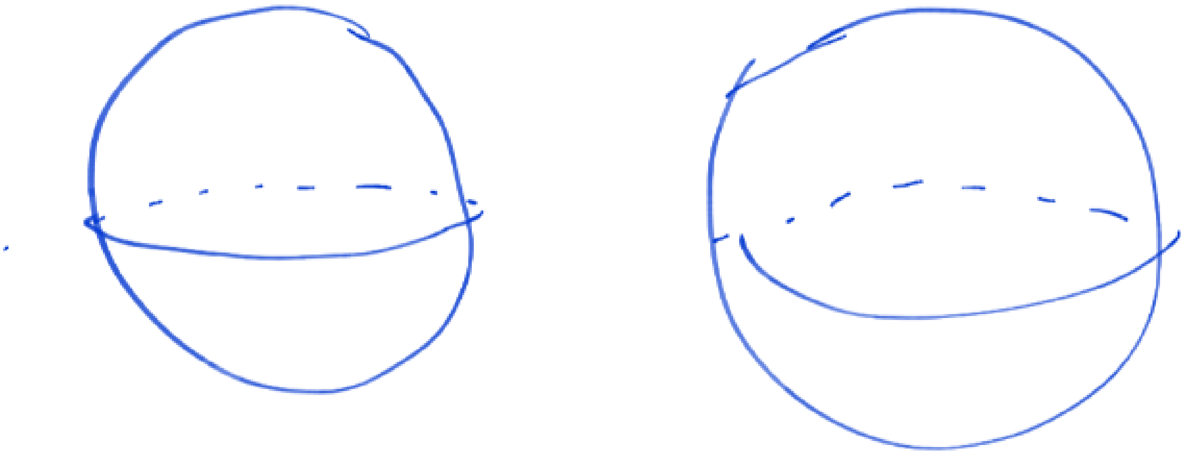
מכדור מתמטי תקין ומלא:
ניתן לקחת כדור:



(גרזיוס!)



לפרק ל-5 חלקים, לסובב ולהזיז כל אחד מן החלקים (מבלי למתוח/לנפח/לכווץ), ולהרכיב מחדש:



שני כדורים מאותו גודל של הכדור המקורי! זהים לחלוטין לכדור המקורי.

המשפט מוכיח שקיימת חלוקה כזו ל-5 חלקים, אך חלוקה כזו בפועל אינה אפשרית. החלקים אינם "מדידים" (measurable).

(2) אתם קוראים פונקציה:

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ כרגיל.

[illegible] $x \in [-100,100]$.

אתם מספרים לי את $f(y)$ לכל $y \neq x$.

אני מנחש את $f(x)$ וצריך בהסתברות 1.
(הסיכוי שאטעה הוא אפס.)

למה זה אבסורד? לכל פונקציה שמוגדרת בכל $\mathbb{R}\setminus\{x\}$, ניתן להשלים אותה ב-x להיות מה שרוצים.

תחשבו על:

$$f(w) = \begin{cases} w^3+17 & , w \neq x \\ ? & , w = x \end{cases}$$

יש כמובן פונקציה מאבדת קהורה...

10^{55}.

פתרון: נתבונן דקה $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$.

נגדיר יחס $\sim$: $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

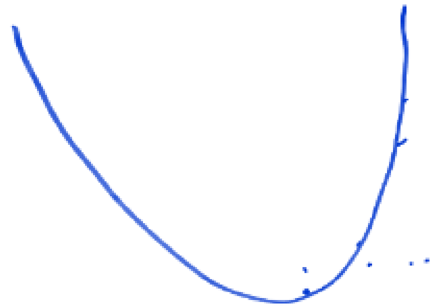
$f \sim g \iff f(w)=g(w)$ לכל $w\in\mathbb{R}$
פרט למספר סופי של ערכים

לדוגמה:
$w \in \{1,7,63,512,917\}$

π

$$f(w) = \begin{cases} \ldots & \ldots, \\ w^2 & \text{אחרת}, \end{cases}$$

$$f \sim w^2$$



$\sim$ אכן יח"ש. נראה לרגע:

$$f \sim g \Rightarrow \forall w \in \mathbb{R} \setminus \underbrace{A}_{\text{סופית}} : f(w) = g(w)$$

$$g \sim h \Rightarrow \forall w \in \mathbb{R} \setminus \underbrace{B}_{\text{סופית}} : g(w) = h(w)$$

מכאן:

$$\forall w \in \mathbb{R} \setminus \underbrace{(A \cup B)}_{\text{קב' סופית}} : f(w) = h(w)$$

סה"כ $f \sim h$.

עכשיו, נבחר נציג מכל מח"ש (שימו לב לשימוש באקסיומת הבחירה).

$$T = \{g_i\}_{i \in I}$$

זו רשימה של נציגים ממחלקות השקילות של $\sim$.

כעת ושתק:

נניח כי נבחרה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
סיפרנו לו את $f(y)$ לכל $y\neq x$.

קיימת $g\in T$ אחת ויחידה כך ש- $g\sim f$.

אני אומרת ש- $f(x)=\underbrace{g}_{\text{ידוע}}(x)$.

<u>מה הסיכוי שאני אטעה בניחוש?</u>

אנו יודעים כי $f(w)=g(w)$ לכל $w\in\mathbb{R}\setminus \underbrace{A}_{\text{איזושהי קב' סופית}}$.

כלומר, אם $x\notin A$, אז $f(x)=g(x)$, ונצדק.

ולכן, הסיכוי שאטעה הוא (לכל היותר) הסיכוי ש- $x\in A$.
אבל x נבחרה באקראי (באופן אחיד) מתוך קטע:
$$[-100,100]$$
והיות ו-A קבוצה סופית. ולכן הסיכוי שמס' אקראי בקטע כזה נמצא ב-A הוא $\underline{\underline{0}}$.

מ.ש.ל.

הלמה של צורן (Zorn's lemma):

הלמה של צורן היא טענה שנטענה <u>שקולה</u> להנחת אקסיומת הבחירה.

אם נניח כי אקסיומת הבחירה נכונה, ניתן להוכיח את הלמה של צורן. וההיפך: אם נניח כי הלמה של צורן נכונה, ניתן להוכיח את אקסיומת הבחירה.

הלמה של צורן: תהי $(A \neq \emptyset, \le)$ קס"ח.

אם לכל שרשרת (תת-קבוצה של A שכל שני איברים בה ניתנים להשוואה, כלומר, תת-קבוצה של A שהיא סדורה מלאה) ב-A יש חסם מלעיל (כלומר, איבר ב-A שגדול שווה מכל איברי השרשרת)

חייב להיות ב-A, אך לא חייב להיות חלק מן השרשרת!

אזי: יש ב-A איבר מקסימלי.

דוגמאות:

(1) $(\mathbb{N}, \le)$ יחס הסדר הרגיל.

אין איבר מקסימלי.
אין סתירה ללמה של צורן, כי לשרשרת

$\{1,2,3,\dots\}$

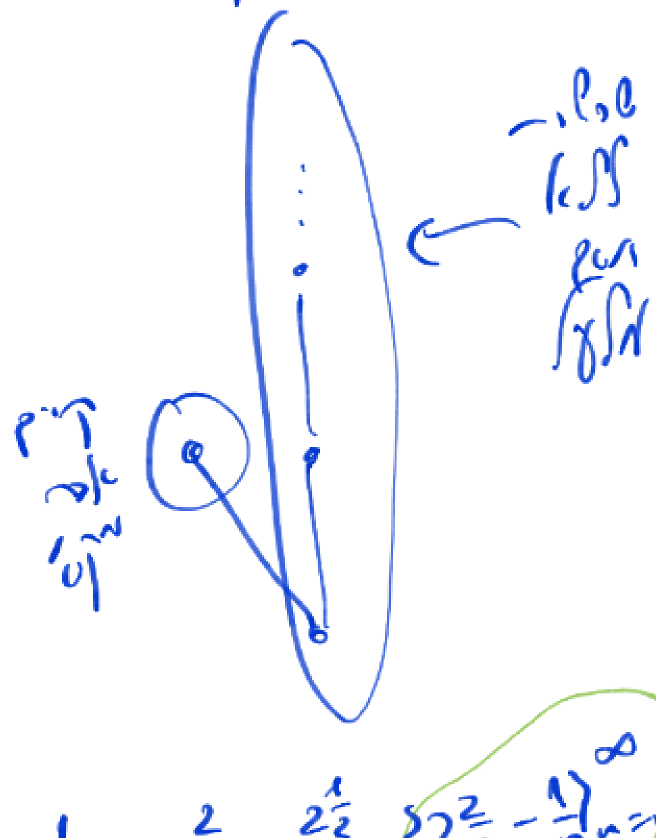
אין חסם מלעיל קבוצה!

(2) $\{x\in\mathbb{R} \mid 0\le x\le 1\}$ עם יחס הסדר הרגיל $\le$.

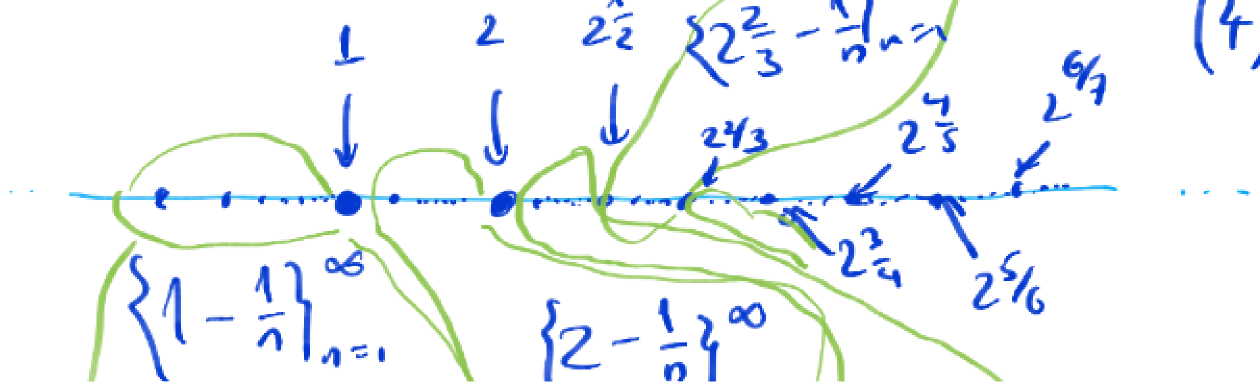
זהו קס״ם ולכן כל תת-קב׳ שלה היא שרשרת.
ובאמת יש לכל שרשרת חסם מלעיל: 1.

זהו גם האבר המקסימלי.

(3) הכיוון ההפוך ללמה של צורן אינו נכון:



(4)



$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$

כאן אין מקס׳: אם $1-\frac{1}{N}$ מקס׳, אז נקבל ש-

$1-\frac{1}{N+1} \gneq 1-\frac{1}{N}$

בסתירה למקס׳ $1-\frac{1}{N}$.

$\left\{2\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

$\left\{1, 2, 2\frac{1}{2}, 2\frac{2}{3}, 2\frac{3}{4}, 2\frac{4}{5}, \dots\right\}$

שרשרת ללא חסם מלעיל!

לכן, אין איבר מקסימלי.

(5) תרגיל:

$$X = \{B \subseteq \mathbb{R} \mid B \text{ אינה מכילה מספר רציונלי}\}$$

על X ניתן להגדיר יחס סדר: $\subseteq$.

האם לכל שרשרת ב-X יש חסם מלעיל?

תהי $S \subseteq X$ תת-קבוצה של X שהיא שרשרת

(כלומר: $\forall B_1, B_2 \in S:\ B_1 \subseteq B_2$ או $B_2 \subseteq B_1$)

נבחן את $Y := \bigcup_{B \in S} B$. זוהי תת-קבוצה של $\mathbb{R}$,

ו-Y לא מכילה אף מספר רציונלי.

(אז) $q \in Y$ רציונלי, אז $\exists B \in S : q \in B$
מהגדרת האיחוד, בסתירה לכך ש-$B \in X$.)

ברור כי Y חסם מלעיל של S:

$$\forall C \in S, \quad C \subseteq \bigcup_{B \in S} B = Y.$$

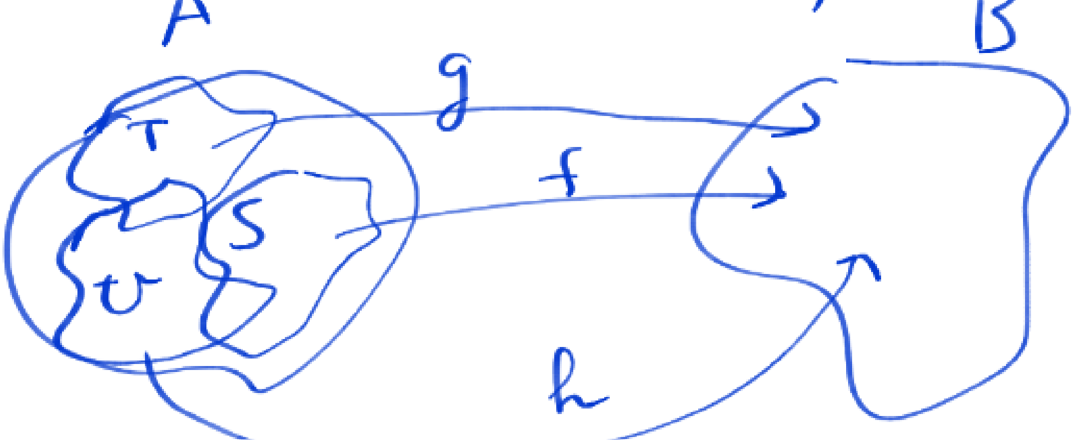
לכן תנאי הלמה של צורן מתקיימים, ולכן יש איבר מקסימלי.

במקרה הזה, ניתן לתאר את האיבר המקסימלי בקלות (הוא גם גדול ביותר ולכן מהווה בעצמו חסם מלעיל לכל שרשרת):

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ אוסף האי-רציונלים.

<u>טענת עזר:</u> תהיינה A, B קבוצות לא ריקות.

$$X = \left\{ (S, f) \;\middle|\; \begin{array}{l} S \overset{\text{נתמך ב-}}{\subseteq} A \\ \underset{\text{פונקציה}}{f : S \to B} \end{array} \right\}$$

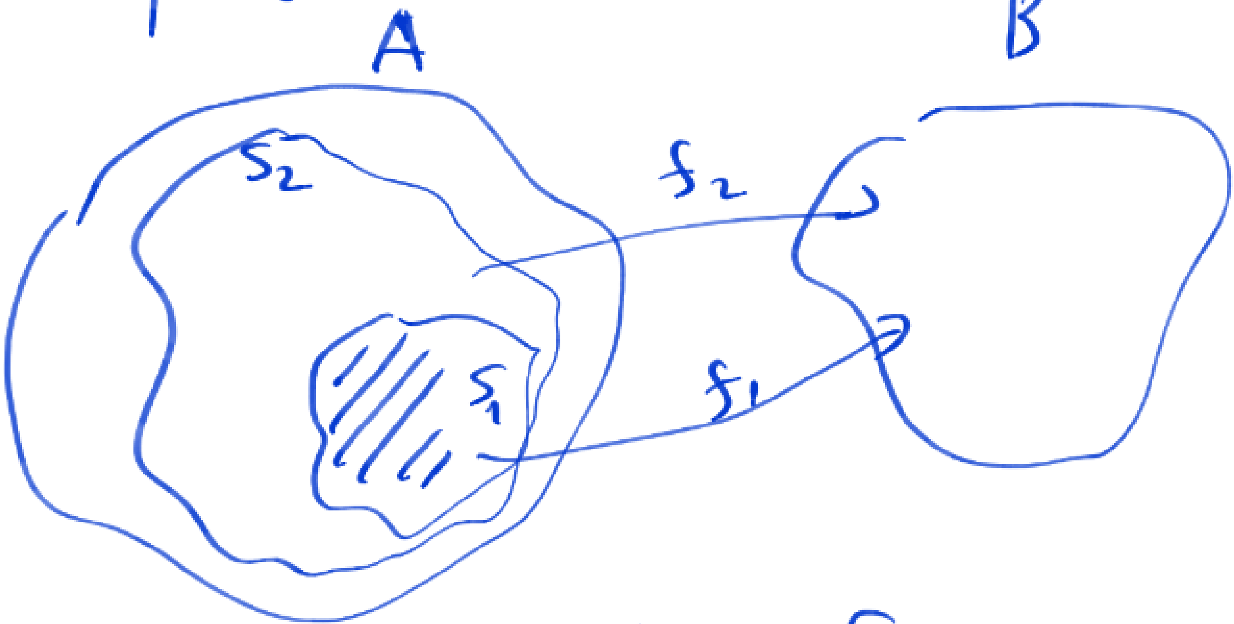


על X ניתן להגדיר יחס סדר חלקי כדלקמן:

נאמר כי:

$$(S_1, f_1) \le (S_2, f_2)$$

אם: $S_1 \subseteq S_2$ ו- $\underbrace{f_2|_{S_1}}_{\text{צמצום פונקציה}} = f_1$.



אם ניקח $s \in S_1$ אז:

$$f_1(s) = f_2(s).$$

היחס $\le$ הינו יחס סדר חלקי.

נראה טרנזיטיביות:

נניח: $(S_1, f_1) \le (S_2, f_2)$

$$(S_2, f_2) \le (S_3, f_3)$$

אזי נשאר כי:

$$(S_1, f_1) \le (S_3, f_3)$$

הוכחה - ראשית: $S_1 \subseteq S_3 \Leftarrow S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_3$

$$f_3|_{S_1} \overset{?}{=} f_1$$

יהי $s \in S_1$. אזי קבל, $s \in S_2$ (כי $S_1 \subseteq S_2$)

ולכן מכך ש- $f_3|_{S_2} = f_2$ (שהרי נתון: $(S_2, f_2) \le (S_3, f_3)$)

נקבל כי:

$$f_3(s) = f_2(s)$$

באופן דומה, $(S_1, f_1) \le (S_2, f_2)$ ולכן:

$$f_2|_{S_1} = f_1$$

וקבל:

$$f_2(s) = f_1(s)$$

נסיק:

$$f_3(s) = f_1(s)$$

ולכן $f_3|_{S_1} = f_1$. טוה"נ $(S_1, f_1) \le (S_3, f_3)$

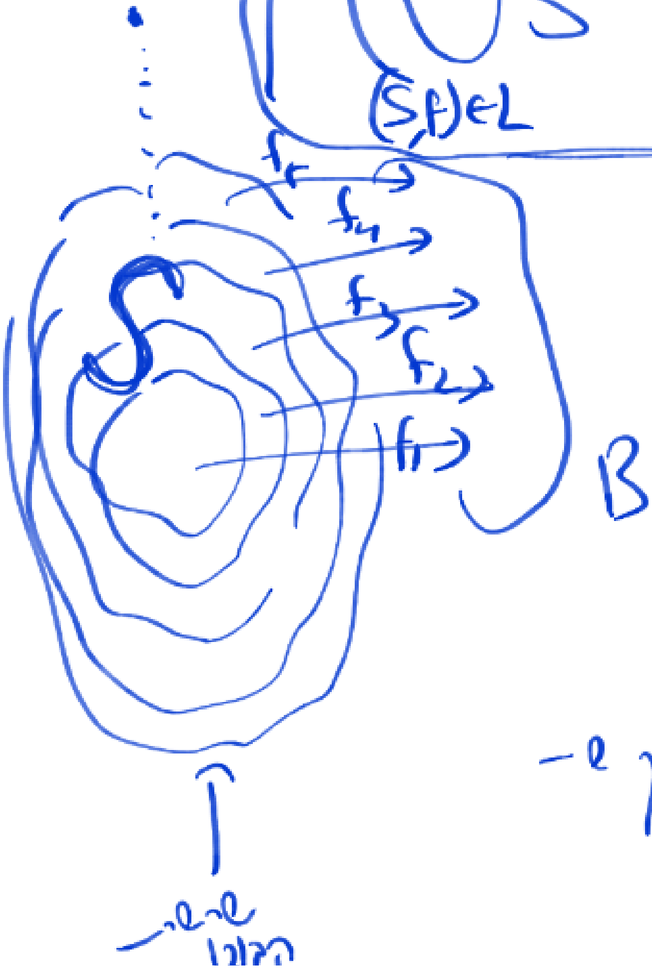
מ.ש.ל.

טענה.

הערה: אם L שרשרת של איברים מתוך X (L היא קב' של זוגות מהצורה (S,f), וכל $(S_1,f_1),(S_2,f_2)\in L$ מקיימים: $(S_1,f_1)\leq(S_2,f_2)$ או $(S_2,f_2)\leq(S_1,f_1)$)

אזי הזוג הבא:

$$\boxed{\left(\bigcup_{(S,f)\in L} S,\ g\right)} \in X$$



מוגדרת לכך: יהי $a\in\bigcup_{(S,f)\in L} S$. בפרט, יש איזה זוג (S,f) כך ש- $a\in S$.

ונגדיר: $g(a)=f(a)$

$g(a) = f(a)$. וישנה בין A

זוג זה מהווה חסם מלעל לשרשרת L ב-X.

דוגמה:

$A = \mathbb{N}$ $\qquad$ $B = \{0,1\}$

שרשרת:

$(\{1\}, f_1)$ $\qquad$ $f_1 : \{1\} \to \{0,1\}$

$(\{1,2\}, f_2)$ $\qquad$ $f_2 : \{1,2\} \to \{0,1\}$

$(\{1,2,3\}, f_3)$ $\qquad$ $f_3 : \{1,2,3\} \to \{0,1\}$

$(\{1,2,3,4\}, f_4)$ $\qquad$ $f_4 : \{1,2,3,4\} \to \{0,1\}$

$\vdots \qquad \vdots$

כי $f_2|_{\{1\}} = f_1$, $f_3|_{\{1,2\}} = f_2$, $f_4|_{\{1,2,3\}} = f_3$, ...

לכען שרשר...

$$\bigcup_{(S,f)\in L} S = \mathbb{N}$$

$$L = \{ (\{1,\dots,n\}, f_n) \mid n \in \mathbb{N} \}$$

$$\cancel{\bigcup}$$

$$(\mathbb{N}, ?)$$

מדוע g מוגדרת היטב?

$$a \in \bigcup_{(S,f)\in L} S$$

נגדיר: $g(a)$

לכל $a \in \bigcup_{(S,f)\in L} S$ (קיים) יש איזה $\underbrace{(S,f)}_{1}\in L$ כך ש- $a \in S$, ונגדיר:

$$g(a) = f(a).$$

- g מוגדרת על $\bigcup_{(S,f)\in L} S$ (מוגדרת היטב, חד-ערכית)

- g חד-ערכית

$a \in S_1 \rightsquigarrow g(a) = f_1(a)$

$a \in S_2 \rightsquigarrow g(a) = f_2(a)$

נראה כי g פונ. . . יהי $a\in\bigcup_{(S,f)\in L} S$

ק -ש $g(a)=f_1(a)$, $a\in S_1$

$g(a)=f_2(a)$, $a\in S_2$

נראה כי $f_1(a)=f_2(a)$.

נתון כי L שרשרת, ולכן:

$(S_2,f_2)\le(S_1,f_1)$ או $(S_1,f_1)\le(S_2,f_2)$

$\downarrow$

בה"כ.

כ"ל:

$S_1\subseteq S_2$

$f_2|_{S_1}=f_1$

בפרט עבור $a\in S_1,S_2$:

$f_2(a)=f_1(a)$.

כעת נוכיח כי $\left(\bigcup_{(S,f)\in L} S\ ,\ g\right)$ הינו חסם מלעיל לשרשרת L.

(שימו לב - הזוג הזה אינו בהכרח שייך ל-L! למשל בדוגמה שעשינו עם $\mathbb{N}$.)

יהי $(T,h)\in L$ [illegible]

$$(T,f) \le \Big(\bigcup_{(S,f)\in L} S \, , \, g\Big)$$

• קודם כל: $T \subseteq \bigcup_{(S,f)\in L} S$ ידוע ש- $(T,f)\in L$.

• צ"ל: $g|_T = f$

יהי $t\in T$. צ"ל: $g(t)=f(t)$.

כיצד g הוגדרה? לקחנו (T,f) כך ש- $t\in T$, ואמרנו $g(t)=f(t)$.

ולכן הדרוש מתקיים מהגדרת g.

מ.ש.ל.

שימושים: <u>עקרון השוואת העוצמות</u>

<u>משפט</u>. תהיינה A,B קבוצות $\neq\emptyset$. אזי:

$|A|\le|B|$ או $|B|\le|A|$.

(במילים אחרות, היחס $\le$ על עוצמות הוא מלא.)

<u>הוכחה</u>: נתבונן בקב' X:

$$X=\{(S,f) \mid S\subseteq A,\ f:S\to B\}$$

גם יחס הסדר עליו דיברנו קודם.
מתקיים בתת-קבוצה של X:

$$Y=\{(S,f) \mid S\subseteq A,\ f:S\to B,\ f \text{ חח"ע}\}$$

ברצוני להשתמש בלמה של צורן כדי להסיק שקיים ב-Y איבר מקסימלי.

צ"ל: (1) $Y\neq\emptyset$

(2) לכל שרשרת $L\subseteq Y$ יש חסם מלעיל.

(1) $(\underbrace{\emptyset}_{\text{הקבוצה הריקה}},\ \underbrace{\emptyset}_{\text{הפונקציה הריקה (=הקבוצה הריקה)}})\in Y$ חח"ע

(2) תהא $L\subseteq Y$ שרשרת. נתבונן ב-

$$\Big(\bigcup_{(S,f)\in L} S\ ,\ g\Big)$$

שבנינו לעיל. ראינו כי זהו חסם מלעיל ל-L.

מ- X.

מי אמר שבכלל זה משתייך ל-Y?

כן. להראות זאת, יש להוכיח כי g חח״ע.

יהיו $a,b\in\bigcup_{(S,f)\in L} S$. נניח כי $g(a)=g(b)$, צ״ל כי $a=b$.

$a,b\in\bigcup_{(S,f)\in L} S$ ולכן קיימים:

$(T_1,f_1)\in L$ כך ש- $a\in T_1$ $\quad(\Rightarrow g(a)=f_1(a))$

$(T_2,f_2)\in L$ כך ש- $b\in T_2$ $\quad(\Rightarrow g(b)=f_2(b))$

אך L שרשרת, ולכן: (בה״כ)

$$(T_1,f_1)\le(T_2,f_2)$$

וכאמור,

$$f_2|_{T_1}=f_1$$

ולכן

$$f_2(a)=f_1(a)=g(a)\underset{\text{מהנחה}}{=}g(b)=f_2(b)$$

אך $(T_2,f_2)\in L\subseteq Y$ ולכן f_2 חח״ע, כלומר:

$$a=b$$

סה"כ, g חח"ע ולכן $\left(\bigcup_{(S,f)\in L} S,\ g\right)\in Y$.

כאמור, ראינו כבר כי נוצר זה מהווה חסם מלעיל לשרשרת L.
לכן, מתקיימים תנאי הלמה של צורן ולכן קיים ב-Y איבר מקסימלי, נסמנו:

$$(U,\ h)\in Y$$

בפרט: $U\subseteq A$
$h:U\to B$ חח"ע

נחלק למקרים:

① $U=A$. סימנו, כי:

$h:U=A\longrightarrow B$ חח"ע

כלומר: $|A|\leq|B|$.

② $U\subsetneq A$. ונראה כי h על.

נניח בשלילה כי h איננה על, כלומר

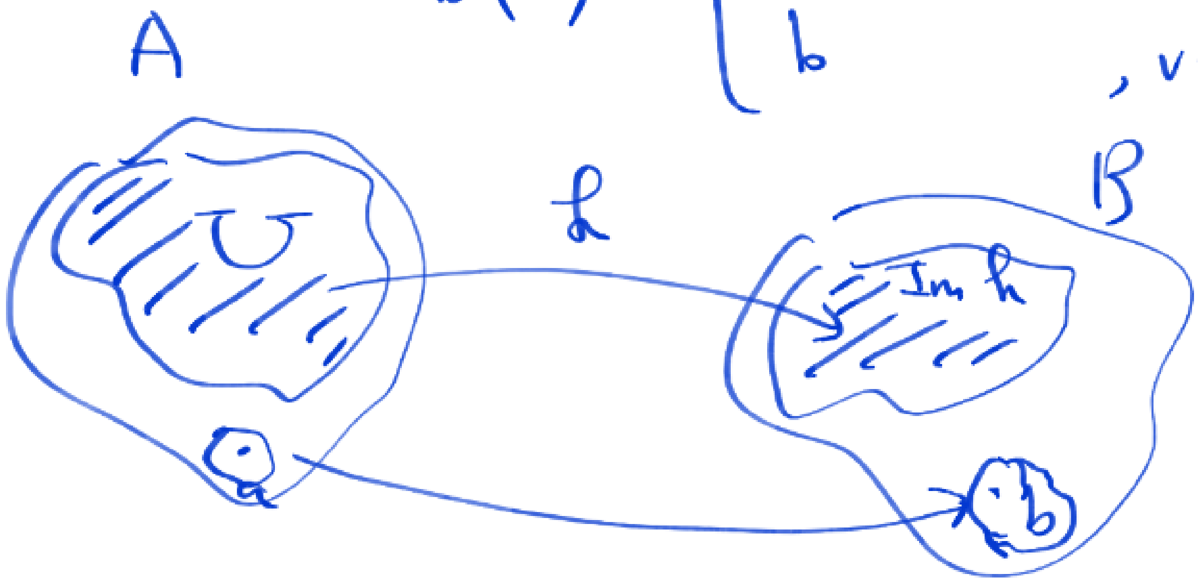
$\exists b\in B\setminus \operatorname{Im} h$.

נניח כי $U \subsetneq A$, אזי $\exists a \in A \setminus U$.

נגדיר זוג חדש:

$$\big(\underbrace{U \cup \{a\}}_{V}, \tilde{h}\big)$$

$$\tilde{h}(v) = \begin{cases} h(v) & , v \in U \\ b & , v = a \end{cases}$$



מה ניתן לומר על $(V, \tilde{h})$?

מתקיים: $(V, \tilde{h}) \in Y$, מפני ש- $\tilde{h}$ חח"ע

(הוכחה - תרגיל רשות קל עבורכם).

בנוסף:

$$(U, h) \lneq (V, \tilde{h})$$

$U \subsetneq V$ וכן, $h|_U = h$.
(לפי הגדרת $\tilde{h}$)

זה סותר ש-(U,h) מקסימלי!

מכאן: ש-h הינה פונקציה על.
(כי הנחנו בשלילה שהיא לא על.)

סה״כ:

$h : U \to B$ פונקציה על.

ולכן:

$\exists\, \varphi : B \to U$ חח״ע
(הוכחנו טענה זו)

וסה״כ:

$$|B| \le |U| \le |A|$$

$U \subseteq A$

לכן, קרה אחד מהמקרים $|A| \le |B|$ או
$|B| \le |A|$.

מ.ש.ל.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -