אלגברה לינארית למורים- פתרון תרגיל 7

שאלה 1

קבעו עבור כל אחד מהקבוצות הבאות האם הוא בת"ל או ת"ל?

א. $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}\right\}$

פתרון

נבדוק אם הצירוף הלינארי לוקטור האפס הוא הצירוף הלינארי הטריוויאלי

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

נכניס למטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&0&-2\\3&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{R_2-2R_1\to R_2\\R_3-3R_1\to R_3}}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&1&3\end{pmatrix}$$

נקבע $\alpha_3=t$ ולכן נקבל:

$$\alpha_1-\alpha_3=0\Rightarrow\alpha_1=\alpha_3=t$$
$$\alpha_2+3\alpha_3=0\Rightarrow\alpha_2=-3\alpha_3=-3t$$

ולכן אם נבחר למשל t=1 נקבל פתרון שאינו טריוואלי:

$$\alpha_1=1,\alpha_2=-3,\alpha_3=1$$

ולכן הקבוצה תלויה לינארית

ב. $\left\{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}\right\}$

פתרון

נבדוק אם הצירוף הלינארי לוקטור האפס הוא הצירוף הלינארי הטריוויאלי

$$\alpha_1\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

נכניס למטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix}2&1&-1\\3&0&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\frac{1}{2}\to R_1}\begin{pmatrix}1&0.5&-0.5\\3&0&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-3R_1\to R_2}\begin{pmatrix}1&0.5&-0.5\\0&-1.5&-0.5\end{pmatrix}$$

נקבע $\alpha_3=t$ ולכן נקבל:

$$-1.5\alpha_2-0.5\alpha_3=0\Rightarrow\alpha_2=-1/3\alpha_3=-1/3t$$
$$\alpha_1+0.5\alpha_2-0.5\alpha_3=0\Rightarrow\alpha_1=2/3\alpha_3=2/3t$$

ולכן אם נבחר למשל t=3 נקבל פתרון שאינו טריוואלי:

$\alpha_1 = 2, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 3$
ולכן הקבוצה תלויה לינארית

ג. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

פתרון

נבדוק אם הצירוף הלינארי לוקטור האפס הוא הצירוף הלינארי הטריוויאלי

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נכניס למטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 - R_1 \to R_4]{\substack{R_2 - 2R_1 \to R_2 \\ R_3 - 3R_1 \to R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_{4-2R_2 \to R_4}]{R_3 - 2R_2 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 - \frac{3}{2}R_3 \to R_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן נקבל $\alpha_3 = \alpha_2 = \alpha_1 = 0$ כלומר קיבלנו את הפתרון הטריוויאלי ולכן הקבוצה בת"ל.

ד. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

פתרון

נבדוק אם הצירוף הלינארי לוקטור האפס הוא הצירוף הלינארי הטריוויאלי

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נכניס למטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_1 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 - R_2 \to R_3 \\ R_1 - R_2 \to R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נקבע $\alpha_3 = t$ ולכן נקבל:

$$\alpha_1 - \alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_3 = t$$
$$2\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_3 = t$$

ולכן אם נבחר למשל t=1 נקבל פתרון שאינו טריוואלי:

$\alpha_1=1,\alpha_2=1,\alpha_3=1$

ולכן הקבוצה תלויה לינארית

שאלה 2

א. האם $\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של איברי הקבוצה: $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}\right\}$?

פתרון

נבדוק אם קיימים סקלרים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ כך שמתקיים:

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$$

נכניס למטריצה ונדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-1\\2&0&-2&2\\3&1&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[R_3-3R_1\to R_3]{R_2-2R_1\to R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-1\\0&0&0&4\\0&1&3&3\end{array}\right)$$

הגענו לשורת סתירה ולכן הוקטור $\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ אינו צירוף לינארי של איברי הקבוצה:

$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}\right\}$.

ב. האם $\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של איברי הקבוצה $\left\{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}\right\}$?

פתרון

נבדוק אם קיימים סקלרים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ כך שמתקיים:

$$\alpha_1\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$$

נכניס למטריצה ונדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&-1&2\\3&0&-2&-4\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\frac{1}{2}\to R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0.5&-0.5&1\\3&0&-2&-4\end{array}\right)\xrightarrow{R_2-3R_1\to R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0.5&-0.5&1\\0&-1.5&-0.5&-7\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\frac{-2}{3}\to R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0.5&-0.5&1\\0&1&1/3&14/3\end{array}\right)$$

נקבע $\alpha_3=t$ ולכן נקבל:

$$\alpha_2 + 1/3\alpha_3 = 14/3 \Rightarrow \alpha_2 = -1/3\alpha_3 + 14/3 = -1/3t + 14/3$$
$$\alpha_1 + 0.5\alpha_2 - 0.5\alpha_3 = 1 \Rightarrow \alpha_1 = 2/3\alpha_3 - 4/3 = 2/3t - 4/3$$

ולכן אם נבחר למשל t=0 נקבל פתרון $\alpha_1 = 14/3, \alpha_2 = -4/3, \alpha_3 = 0$

כלומר הוקטור $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של איברי הקבוצה: $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

שהרי מתקיים:

$$\frac{-4}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{14}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

ג. האם $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של איברי הקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$?

פתרון

נבדוק אם קיימים סקלרים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ כך שמתקיים:

$$\alpha_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

נכניס למטריצה ונדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 - R_1 \to R_4]{\substack{R_2 - 2R_1 \to R_2 \\ R_3 - 3R_1 \to R_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 - 2R_2 \to R_4]{R_3 - 2R_2 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 - \frac{3}{2}R_3 \to R_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4.5 \end{array}\right)$$

הגענו לשורת סתירה ולכן הוקטור $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ אינו צירוף לינארי של איברי הקבוצה:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

שאלה 3

א. האם $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ שייך ל $span\left\{\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}\right\}$?

במילים אחרות, האם $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של $\left\{\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}\right\}$?

פתרון

נבדוק אם קיימים סקלרים α_1,α_2 כך שמתקיים:

$$\alpha_1\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

נכניס למטריצה ונדרג:

$$\left(\begin{array}{cc|c}-1 & 2 & 1\\-3 & -2 & 2\end{array}\right)\xrightarrow{R_2-3R_1\to R_2}\left(\begin{array}{cc|c}-1 & 2 & 1\\0 & -8 & -1\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{-1}{8}R_2\to R_2}\left(\begin{array}{cc|c}-1 & 2 & 1\\0 & 1 & 1/8\end{array}\right)\xrightarrow{R_1-2R_2\to R_1}\left(\begin{array}{cc|c}-1 & 0 & 3/4\\0 & 1 & 1/8\end{array}\right)$$

ולכן נקבל:

$\alpha_1=-3/4$

$\alpha_2=1/8$

ולכן הוקטור אכן שייך לspan כי מתקיים:

$$\frac{-3}{4}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}+\frac{1}{8}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

ב. האם $\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ שייך ל- $span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$ **?**

פתרון

נבדוק אם קיימים סקלרים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ כך שמתקיים:

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$$

נכניס למטריצה ונדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -3 & -1\\0 & 2 & -2 & 0\\-1 & 0 & 1 & 2\end{array}\right)\xrightarrow{R_3+R_1\to R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -3 & -1\\0 & 2 & -2 & 0\\0 & 2 & -2 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[R_1-R_2\to R_1]{R_3-R_2\to R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & -1\\0 & 2 & -2 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

קיבלנו שורת סתירה ולכן הוקטור $\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ אינו שייך ל- $span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$.

ג. האם $\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$ שייך ל- $span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$ **?**

פתרון

נבדוק אם קיימים סקלרים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ כך שמתקיים:

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$$

נכניס למטריצה ונדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-3&2\\0&2&-2&2\\-1&0&1&-2\end{array}\right)\xrightarrow{R_3+R_1\to R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-3&2\\0&2&-2&2\\0&2&-2&0\end{array}\right)\xrightarrow[R_1-R_2\to R_1]{R_3-R_2\to R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&2&-2&2\\0&0&0&-2\end{array}\right)$$

קיבלנו שורת סתירה ולכן הוקטור $\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$ אינו שייך ל- $span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$.