83-116-תרגיל 10-פתרון

.1

מצאו נוסחא רקורסיבית למספר המילים באורך n על הא״ב $\{0,1,2\}$ שאינם מכילים רצף 1-ים ורצף 2-ים.

נסמן ב- a_n את מספר המילים ה"טובות" (לא מכילות רצף 11 או 22) באורך n, וב- a_n^0, a_n^1 ו-a_n^2 את מספר המילים הטובות שנגמרות ב- 0, 1 או 2 בהתאמה. כמובן ש $a_n = a_n^0 + a_n^1 + a_n^2$ (לכל $n \in \mathbb{N}$).
אם מילה טובה באורך $n-1$ ניגמרת ב- 0 ניתן ליצור ממנה 3 מילים טובות באורך n, ע"י הוספת 0, 1 או 2 בסופה, אם המילה נגמרת ב- 1 ניתן להאריך אותה רק ב-2 דרכים, ע"י הוספת 0 או 2 (אי אפשר להוסיף 1 אחרת נקבל 11 במילה) ובדומה אם המילה נגמרת ב- 2 ניתן להאריך אותה ב-2 דרכים, ע"י הוספת 0 או 1.
ולכן $a_n = 3a_{n-1}^0 + 2a_{n-1}^1 + 2a_{n-1}^2 = 2(a_{n-1}^0 + a_{n-1}^1 + a_{n-1}^2) + a_{n-1}^0 = 2a_{n-1} + a_{n-1}^0$.
לכל מילה באורך $n-1$, באם היא נגמרת ב- 0, 1 או 2, ניתן להוסיף 0 בסופה כדי ליצור מילה באורך n שנגמרת ב-0, ולכן $a_n^0 = a_{n-1}^0 + a_{n-1}^1 + a_{n-1}^2 = a_{n-1}$, ולכן $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-1}^0 = 2a_{n-1} + a_{n-2}$.
נשאר רק למצוא תנאי התחלה, נצטרך 2 תנאים כי הנוסחא כוללת איברים עד a_{n-2}, קל ראות ש $a_1 = 3$ (כל המילים באורך 1) ו- $a_2 = 7$. (כל המילים באורך 2 מלבד 11 ו- 22).

.2

מצא נוסחא רקורסיבית למסי׳ המילים באורך n מעל הא״ב $\{A,B,C\}$ שאינן מכילות את הרצפים AA ו-BC.

נסמן ב- a_n את מספר המילים ה"טובות" (לא מכילות רצף AA או BC) באורך n, וב- a_n^A, a_n^B ו-a_n^C את מספר המילים הטובות שנגמרות ב- A, B או C בהתאמה. כמובן ש $a_n = a_n^A + a_n^B + a_n^C$ (לכל $n \in \mathbb{N}$).
לכל מילה באורך $n-1$, באם היא נגמרת ב- A, B או C, ניתן להוסיף B בסופה כדי ליצור מילה באורך n שנגמרת ב-B, ולכן $a_n^B = a_{n-1}^A + a_{n-1}^B + a_{n-1}^C = a_{n-1}$. אם מילה באורך $n-1$ נגמרת ב- A או C ניתן

להוסיף C בסופה, אם היא נגמרת ב- B אי אפשר לעשות זאת (נקבל BC במילה) ולכן $a_n^C = a_{n-1}^A + a_{n-1}^C$, ובדומה $a_n^A = a_{n-1}^B + a_{n-1}^C$, ואם נחבר את המשוואות נקבל ש

$$a_n = a_n^A + a_n^B + a_n^C =$$
$$= \left(a_{n-1}^B + a_{n-1}^C\right) + \left(a_{n-1}^A + a_{n-1}^B + a_{n-1}^C\right) + \left(a_{n-1}^A + a_{n-1}^C\right) = 2a_{n-1}^A + 2a_{n-1}^B + 3a_{n-1}^C =$$
$$= 2\left(a_{n-1}^A + a_{n-1}^B + a_{n-1}^C\right) + a_{n-1}^C = 2a_{n-1} + a_{n-1}^C =$$

כעת, נשתמש בשוויונות $a_n^C = a_{n-1}^A + a_{n-1}^C$, ו- $a_n^B = a_{n-1}$ שגילינו:

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-1}^C = 2a_{n-1} + a_{n-2}^A + a_{n-2}^C = 2a_{n-1} + \left(a_{n-2}^A + a_{n-2}^B + a_{n-2}^C\right) - a_{n-2}^B =$$
$$= 2a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$$

נמצא תנאי התחלה, צריך 3 מהם בשביל הנוסחא $a_1 = 3$, $a_2 = 7$ ו- $a_3 = 16$ (כל המילים מלבד $AAA, AAB, AAC, BAA, CAA, BCA, BCB, BCC, ABC, BBC, CBC$, הורדנו זה $27 - 11 = 16$ מילים)

.3

אדם הולך לחנות פרות,ירקות ומשקאות
חלה תקלה במחשב החנות וכעת:
אם הודפס משקה, יוכל להירכש אחריו רק עוד משקה.
אם הודפס פרי, יוכל להירכש אחריו רק משקה או פרי נוסף.
אם הודפס ירק, יוכל להירכש אחריו רק משקה או ירק נוסף.

מצא נוסחא רקורסיבית למס' האפשרויות לרכוש n מוצרים בחנות זו.

תהי An-1 קניה חוקית של n-1 מוצרים ו a(n-1) מס' האפשרויות לבנות אותה.אזי:
אם האיסוף נגמר במשקה יש אפשרות אחת להמשיכו ואם האיסוף נגמר בפרי או בירק יש שתי אפשרויות להמשיכו.לכן:

$$a_1 = 3, a_2 = 5$$

$$a_n = a^{\text{מ}}_{n-1} + 2a^{\text{י}}_{n-1} + 2a^{\text{פ}}_{n-1} = 2a_{n-1} - a^{\text{מ}}_{n-1} = 2a_{n-1} - a_{n-2}$$

כיוון שיש הופש של a_{n-2} אפשרויות למלא את n-2 התוים שלפניו, כי בתום כל "איסוף" מותר לקחת עוד משקה.

.4

מצא נוסחת רקורסיה ותנאי התחלה עבור מספר הדרכים לרצף מתחם בגודל n×2 ע"י מרצפות

בגדלים:
א. 2×1, 1×2 ב. 1×1, 2×1

א.
עבור ריצוף שנגמר ב- 2×1 וריצוף שנגמר בשני 1×2:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$
$$a_1 = 1, a_2 = 2$$

ב. עבור ריצוף שנגמר ב- 2×1 וריצוף שנגמר בשני 1×1:

$$a_n = 2a_{n-1}$$
$$a_1 = 2$$