מטריצות הפיכות

הגדרה: מטריצה A נקראת **הפיכה** אם קיימת מטריצה B כך ש $AB = BA = I$.
במקרה זה, מטריצה B נקראת **ההופכית** של A ומסומנת $B = A^{-1}$.

תכונות :

- מטריצה הפיכה היא בהכרח ריבועית
- אם A **ריבועית** ו$AB = I$ אזי גם $AB = BA = I$ וB הינה ההופכית של A
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

תרגיל 6.1 וחצי

הוכח שאם A הפיכה גם המשוחלפת שלה הפיכה ומתקיים ש $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
הסק שאם A הפיכה וסמטרית אזי גם ההופכית שלה סימטרית .

]פתרון

נניח A הפיכה, אזי קיימת לה הופכית כך ש $AA^{-1} = I$.נשחלף את שני האגפים ונקבל $(A^{-1})^t A^t = I^t = I$ומכאן המש"ל כיוון ש Aריבועית וכך גם המשוחלפת שלה .

אם A הפיכה וסימטרית מתקיים $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1} = A^{-1}$כלומר ההופכית גם סימטרית .

מטריצות אלמנטריות

דיברנו כבר על פעולות שורה אלמנטריות כאשר דיברנו על פעולות שלא משנות את מרחב הפתרונות של המערכת המתאימה למטריצה. נזכיר מהן פעולות השורה האלמנטריות :

1. $R_i \leftrightarrow R_j$
2. $R_i \to \alpha R_i$, כאשר $0 \neq \alpha \in \mathbb{F}$
3. $R_i \to R_i + \alpha R_j$כאשר $i \neq j$

פעולת שורה היא למעשה פונקציה שניתן להפעיל על כל מטריצה. למשל נסמן את פעולת השורה $R_1 \to R_1 - R_2$באות ρאזי מתקיים לדוגמא :

$$\rho\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\rho\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

מטריצות אלמנטריות

מטריצת שורה אלמנטרית היא מטריצה המתקבלת מהפעלת פעולת שורה אלמנטרית על מטריצת היחידה .

משפט: לכל מטריצה A מתקיים ש $\rho(A) = \rho(I)A$.

כלומר, הפעלת פעולת שורה אלמנטרית שקולה לכפל במטריצת השורה האלמנטרית המתאימה .

יש משפט והגדרה דומים עבור מטריצות עמודה אלמנטריות עם כפל בצד השני. כמו כן, כל מטריצת שורה אלמנטרית הינה מטריצת עמודה אלמנטרית עבור פעולה מתאימה. מטריצות אלה נקראות ביחד **מטריצות אלמנטריות** .

מסקנה - אלגוריתם למציאת מטריצה הופכית

דירוג מטריצה שקול לכפל במטריצות אלמנטריות המתאימות לפעולות הדירוג. לכן, אם דירגנו מטריצה ריבועית לצורת מטריצה היחידה קיבלנו
$\rho_1(I)\cdots\rho_k(I)A = I$ולפיכך מתקיים שהמטריצה A הפיכה וההופכית שלה הינה $\rho_1(I)\cdots\rho_k(I)$.

אם נדרג קנונית את מטריצת הבלוקים $(A|I)$נקבל מטריצה מהצורה $(I|\rho_1(I)\cdots\rho_k(I))$שכן לפי כפל מטריצת בלוקים, כפל במטריצה האלמנטרית מופעל במקביל על כל אחד מהבלוקים). לכן כאשר אנחנו מדרגים את $(A|I)$עד שנקבל את מטריצת היחידה משמאל, מימין נקבל את המטריצה ההופכית $(I|A^{-1})$.

<u>**דוגמא: (להראות את ההקבלה בין שניהם)**</u>

ע"י פעולות שורה אלמנטאריות:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -3 & 1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

או ע"י מטריצות שורה אלמטאריות:

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = I \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

בדיקה:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix} = I$$

<u>המטריצות ההופכיות של המטריצות האלמנטאריות:</u>

נסמן:

$\rho_{i,j}(I)$ -המטריצה האלמנטארית המחליפה את שורות i ו-j.

$\rho_{k\cdot i}(I)$ -המטריצה האלמנטארית המכפילה את השורה ה-i ב-k.

ו- $\rho_{i+kj}(I)$ - המטריצה האלמנטארית המוסיפה לשורה ה-i k פעמים את השורה ה-j.

אזי:

$$\left(\rho_{i,j}(I)\right)^{-1} = \rho_{i,j}(I)$$

$\left(\rho_{k\cdot i}(I)\right)^{-1} = \rho_{\frac{1}{k}\cdot i}(I)$ (-קיים הופכי כי k מהשדה)

ו- $\left(\rho_{i+kj}(I)\right)^{-1} = \rho_{i-kj}(I)$

(גם הן מטריצות אלמנטאריות!)

ראינו שאם: $\rho_k \cdots \rho_1 A = I$ אז: $\rho_k \cdots \rho_1 = A^{-1}$.

<u>מסקנה</u>: $\rho_1^{-1} \cdots \rho_k^{-1} = A$

כלומר, כל מטריצה הפיכה ניתנת להצגה כמכפלת מטריצות אלמנטאריות.

6.18 תרגיל. יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש A הפיכה. הוכח שהמערכות $Bx=0$ ו $(AB)x=0$ שקולות (כלומר יש להן אותם פתרונות).

פתרון:

$$x\in\{v\in F^n : Bv=0\}\Rightarrow Bx=0\Rightarrow A(Bx)=0\Rightarrow(AB)x=0\Rightarrow x\in\{v\in F^n : ABv=0\}$$

$x\in\{v\in F^n : ABv=0\}\Rightarrow(AB)x=0\Rightarrow A(Bx)=0/\cdot A^{-1}$ משמאל $\Rightarrow Bx=A^{-1}\cdot 0\Rightarrow x\in\{v\in F^n : Bv=0\}$

6.25 תרגיל. תהא A מטריצה ריבועית מעל $\mathbb{C}$, כך שהמטריצה $A+A^2$ הפיכה. קבע איזה מהמטריצות $A, A+I$ היא הפיכה.

$$\exists D: D(A+A^2)=(A+A^2)D=I$$

$$\Rightarrow DA(I+A)=A(I+A)D=I \Rightarrow DA=(I+A)^{-1}, A^{-1}=(I+A)D$$

6.40 תרגיל. **כפל של מטריצות בלוקים**. יהיו $A\in\mathbb{F}^{a\times k}, B\in\mathbb{F}^{a\times m}, C\in\mathbb{F}^{b\times k}, D\in\mathbb{F}^{b\times m}$, ויהיו $X\in\mathbb{F}^{k\times c}, Y\in\mathbb{F}^{k\times d}, Z\in\mathbb{F}^{m\times c}, W\in\mathbb{F}^{m\times d}$. הוכח:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AX+BZ & AY+BW \\ CX+DZ & CY+DW \end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{(a+b)\times(c+d)}$$

פתרון:

1. ראינו בכיתה שעבור מטריצות C,B,A כך שהכפל מוגדר (כלומר מספר עמודות C מס' שורות B,A) מתקיים: $C(A\,|\,B)=(CA\,|\,CB)$.

2. שימו לב שבאותו אופן ניתן להסתכל על מטריצת הבלוקים $\begin{pmatrix} A \\ - \\ B \end{pmatrix}$ ומטריצה שלישית C כך שהכפל מוגדר (כלומר מספר שורות C מס' עמודות B,A) ויתקיים: $\begin{pmatrix} A \\ - \\ B \end{pmatrix}C=\begin{pmatrix} AC \\ - \\ BC \end{pmatrix}$.

ולכן, מהגדלים הנתונים ברור כי המכפלות מוגדרות ונקבל:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & | & Y \\ Z & | & W \end{pmatrix}\underset{\substack{\text{לפי} \\ 1}}{=}\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y \\ W \end{pmatrix}\right)=$$

$$\left(\begin{pmatrix} A & B \\ - & - \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix}\ \middle|\ \begin{pmatrix} A & B \\ - & - \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y \\ W \end{pmatrix}\right)\underset{\substack{\text{לפי} \\ 2}}{=}\overbrace{\begin{pmatrix} (A\ \ B)\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix}\in F^{axc} & | & (A\ \ B)\begin{pmatrix} Y \\ W \end{pmatrix}\in F^{axd} \\ ------ & + & ------- \\ (C\ \ D)\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix}\in F^{bxc} & | & (C\ \ D)\begin{pmatrix} Y \\ W \end{pmatrix}\in F^{bxd} \end{pmatrix}}^{\text{בגלל המימדים הנתונים}}=$$

$$\begin{pmatrix} AX+BZ & AY+BW \\ CX+DZ & CY+DW \end{pmatrix}\in F^{(a+b)x(c+d)}$$

<u>מרחבים וקטורים:</u>

<u>מ"ו-הגדרה:</u> קבוצה V
עם פעולה $+_V$ (**חיבור וקטורי**) המוגדרת על V ופעולה $V \to V$ $\cdot_{\mathbb{F}V}:\mathbb{F}\times V\to V$ (**כפל סקלרי**) נקראת **מרחב וקטורי מעל השדה** $\mathbb{F}$ אם מתקיימות התכונות הבאות:

1 מוגדרות החיבור. לכל $u,v\in V$ מתקיים $u+_V v\in V$,

2 קיבוץ. לכל $u,v,w\in V$ מתקיים $(u+_V v)+_V w=u+_V(v+_V w)$,

3 חילוף. לכל $u,v\in V$ מתקיים $u+_V v=v+_V u$,

4 איבר נייטרלי. קיים איבר $0_V\in V$ כך שלכל $v\in V$ מתקיים $v+0_V=v$,

5 איבר נגדי. לכל $v\in V$ קיים $-v\in V$ כך ש $v+_V(-v)=0_V$.

6 תכונות הכפל הסקלרי:

א. מוגדרות. לכל $v\in V$ ו $\alpha\in\mathbb{F}$ מתקיים $\alpha\cdot_{\mathbb{F}V}v\in V$,

ב. קיבוץ. לכל $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ ולכל $v\in V$ מתקיים $(\alpha\cdot_{\mathbb{F}}\beta)\cdot_{\mathbb{F}V}v=\alpha\cdot_{\mathbb{F}V}(\beta\cdot_{\mathbb{F}V}v)$,

ג. כפל יחידה. לכל $v\in V$ מתקיים $1\cdot_{\mathbb{F}V}v=v$.

ד. פילוג.

(i) לכל $\alpha\in\mathbb{F}$ ולכל $u,v\in V$ מתקיים $\alpha\cdot_{\mathbb{F}V}(u+v)=\alpha\cdot_{\mathbb{F}V}u+\alpha\cdot_{\mathbb{F}V}v$,

(ii) לכל $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ ולכל $v\in V$ מתקיים $(\alpha+\beta)\cdot_{\mathbb{F}V}v=\alpha\cdot_{\mathbb{F}V}v+\beta\cdot_{\mathbb{F}V}v$.

אברי הקבוצה V נקראים **וקטורים**, ואברי השדה $\mathbb{F}$ נקראים **סְקָלָרִים**.

1.2 תרגיל. יהא $\mathbb{R}^2$ עם פעולת חיבור וקטורים הרגילה. בכל אחד מהסעיפים הבאים מוצעת הגדרה לכפל בסקלר. בדוק האם ההצעה אכן נותנת מרחב וקטורי.

א. $\alpha(x,y):=(\alpha x,y)$.

ב. $\alpha(x,y):=(\alpha^2x,\alpha^2y)$.

פתרון:

א. לא, כי <u>ד2</u> לא מתקיים:

$$(k+h)(x,y)=((k+h)x,y)=(kx+hx,y)\neq k(x,y)+h(x,y)=(kx,y)+(hx,y)=((k+h)x,2y)$$

ב. לא, כי <u>ד2</u> לא מתקיים:

$$(h+k)(x,y)=((h^2+2hk+k^2)x,(h^2+2hk+k^2)y)\neq h(x,y)+k(x,y)=((h^2+k^2)x,(h^2+k^2)y)$$

מכפלה קרטזית-הגדרה

יהיו B,A קבוצות, אזי המכפלה הקרטזית בין A ל-B היא:
$A\times B=\{(a,b):a\in A,b\in B\}$, כלומר כל הוקטורים הדו-מימדיים כך שהקואורדינטה הראשונה מגיעה מהקבוצה הראשונה במכפלה והקואורדינטה השניה מהקבוצה השניה במכפלה.

הכללה: יהיו $A_1,...,A_n$ קבוצות, אזי המכפלה הקרטזית ביניהן היא:
$A_1\times\ldots\times A_n=\{(a_1,...,a_n):a_i\in A_i\quad\forall i=1,...,n\}$, כלומר כל הוקטורים ה-n-מימדיים כך שהקואורדינטה במקום ה-i מגיעה מהקבוצה במקום ה-i במכפלה.

תכונה: מכפלה קרטזית היא מ"ו כאשר המוכפלים הם מ"ו מעל אותו שדה עם הפעולות:

- סכום וקטורים לפי רכיבים $(u_1,v_1)+(u_2,v_2):=(u_1+_U u_2,v_1+_V v_2)$,
- כפל סקלארי – גם לפי רכיבים $\alpha(u,v):=(\alpha u,\alpha v)$.

תת מרחב-הגדרה

יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. נאמר ש W **תת-מרחב** של V אם:

1. $\emptyset\neq W\subseteq V$,
2. הקבוצה W היא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ביחס לפעולת החיבור $+_V$ של V, והכפל הסקלרי $\cdot_{\mathbb{F}V}$.

2.1 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהא W תת-מרחב של V. הוכח: $0_W=0_V$.

פתרון:

נתון:

$$\left.\begin{array}{ll} W\subseteq V & \\ \forall w\in W & \exists -w\in W \end{array}\right\}\Rightarrow \forall w\in W \quad w,-w\in V\Rightarrow\ \underset{\substack{\downarrow\\ \text{כאיבר}\\ \text{ב}-V}}{0_V}=w+(-w)=\underset{\substack{\downarrow\\ \text{כאיבר}\\ \text{ב}-W}}{0_W}$$

תרגילים:

2.9 תרגיל. יהא $V=\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח שכל אחת מהקבוצות הבאות מהווה תת-מרחב של V (ביחס לפעולות של V):

א. המטריצות הסימטריות.

[ב. המטריצות האנטי-סימטריות]

ג. המטריצות האלכסוניות.

ד. המטריצות המשולשיות עליונות.

ה. המטריצות A עם $\mathrm{tr}(A)=0$.

ו. המטריצות הסקלריות.

ז. מטריצות מהצורה $O\oplus A=\begin{pmatrix} O & O \\ O & A \end{pmatrix}$. ($A\in\mathbb{F}^{k\times k}$ כאשר $k<n$).

פתרון:

א. $\underset{\text{סימטרית}}{A,B,}\quad k\in F \Rightarrow (A+kB)^t = A^t + kB^t = A+kB$

ב. $\underset{\substack{\text{אנטי}\\ \text{סימטרית}}}{A,B,}\quad k\in F \Rightarrow (A+kB)^t = A^t + kB^t = -(A+kB)$

ג.

$$\underset{\text{אלכסוניות}}{A=(a_{ij}),B=(b_{ij})} \Rightarrow \forall i\neq j \quad a_{ij}, b_{ij}=0 \quad k\in F \Rightarrow A+kB=(a_{ij}+kb_{ij}) : \forall i\neq j \quad a_{ij}+kb_{ij}=0$$

$$\Rightarrow \text{אלכסוניות} \quad A+kB$$

ד.

$$\underset{\substack{\text{משולשיות}\\ \text{עליונות}}}{A=(a_{ij}),B=(b_{ij})} \Rightarrow \forall i> j \quad a_{ij}, b_{ij}=0 \quad k\in F \Rightarrow A+kB=(a_{ij}+kb_{ij}) : \forall i> j \quad a_{ij}+kb_{ij}=0$$

$$\Rightarrow \substack{\text{משולשית}\\ \text{עליונה}} \quad A+kB$$

ה. $k\in F, A,B\in F^{nxn} : tr(A), tr(B)=0 \Rightarrow tr(A+kB)=tr(A)+n\cdot k\cdot tr(B)=0$

ו.

$$\underset{\text{סקלריות}}{A=(a_{ij}),B=(b_{ij})} \Rightarrow \begin{cases} \forall i\neq j \quad a_{ij}, b_{ij}=0 \\ a_{ii}=\alpha, b_{ii}=\beta \quad \forall i=1,\dots,n \end{cases} \qquad \alpha,\beta,k\in F \Rightarrow$$

$$A+kB=(a_{ij}+kb_{ij}) : \begin{cases} \forall i\neq j \quad a_{ij}+kb_{ij}=0 \\ a_{ii}+kb_{ii}=\alpha+k\beta \quad \forall i=1,\dots,n \end{cases} \Rightarrow \text{סקלרית} \quad A+kB$$

ז. תהיינה:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} : A\in F^{kxk}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} : B\in F^{mxm}, \qquad k,m<n$$

אזי:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A+\alpha B \end{pmatrix} :$$

$$A + \alpha B \in F^{(\max(k,m))\times(\max(k,m))} \qquad \wedge \quad \max(k,m) < n$$

2.10 תרגיל. תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, ונגדיר $V_A := \{B \in \mathbb{F}^{n\times n} \ : \ BA = AB\}$.

א. הוכח ש V_A תת־מרחב של $\mathbb{F}^{n\times n}$.

ב. הוכח ש V_A סגור גם לכפל מטריצות.

פתרון:

א.

$$B, C \in V_a \Rightarrow (B + kC)A = BA + kCA = AB + kAC = AB + AkC = A(B + kC) \Rightarrow B + kC \in V_a$$

ב. $B, C \in V_a \Rightarrow (BC)A = B(CA) = B(AC) = (BA)C = (AB)C = A(BC) \Rightarrow BC \in V_a$

3.3 תרגיל. יהיו $U, W \subseteq V$ תת־מרחבים. הוכח: כל תת־מרחב של V המוכל ב $U \cup W$ מוכל כולו ב U ו/או ב W.

הוכחה: נניח בשלילה שV איננו מוכל באחד מת"מ אלו , אזי $\exists u \in U \setminus W \wedge \exists w \in W \setminus U$
אבל U,W מוכלים ב-V ולכן: $u, w \in V$. נתבונן ב- $u + w \notin U, W$ (אחרת u=u+w-w יהיה ב-W וכנ"ל ל-w) ולכן $u + w \notin V$ בסתירה לכך ש- $u, w \in V$ ו-V מ"ו.

3.4 תרגיל. יהי $V = \mathbb{F}^{n\times n}$. בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונים שני תת־מרחבים U, W של V. עבור כל אחד מהם, בצע את סדרת הבדיקות הבאה:

- תאר את $U \cap W$,
- הוכח ש $U \subseteq W$ או $W \subseteq U$; **ואם לא** – הראה ש $U \cup W$ **אינו מ"ו** ע"י שתיקח $u, w \in U \cup W$ כך ש $u \notin W$, $w \notin U$, **ותראה** (ישירות) ש $u + w \notin U \cup W$.

א. U – המטריצות הסימטריות; W – המטריצות האלכסוניות.

ד. U – המטריצות הסקלריות (כלומר מהצורה αI עבור $\alpha \in F$); W – מטריצות מהצורה $O \oplus A = \begin{pmatrix} O & O \\ O & A \end{pmatrix}$. ($A$ מטריצה $k \times k$ כאשר $k < n$).

פתרון:

א. $U \cap W = \{A = (a_{ij}) \in F^{nxn} : A = A^t \wedge \forall i \neq j \quad a_{ij} = 0\}$

$$A = (a_{ij}) \in W \Rightarrow \forall i \neq j \quad a_{ij} = 0 \Rightarrow \forall i \neq j \quad a_{ij} = a_{ji} = 0 \Rightarrow A \in U$$

ולכן $W \subseteq U$

ד.

$$U\cap W=\left\{A\in F^{nxn}:\exists\alpha\in F:\begin{cases}\forall i\neq j & a_{ij}=0\\ \forall i=1,\dots,n & a_{ii}=\alpha\end{cases}\wedge\exists A'\in F^{kxk}:A=\begin{pmatrix}0&0\\0&A'\end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\in U\subseteq U\cup W,\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}\in W\subseteq U\cup W.\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}\notin U,W\Rightarrow\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}\notin U\cup W$$

ולכן האיחוד איננו ת"מ.

<u>סכום תתי מרחבים-הגדרה</u>

יהא V מרחב וקטורי, ויהיו U,W תת-מרחבים של V. **הסכום** $U+W$ מוגדר ע"י:

$.U+W=\{u+w\ :\ u\in U,\ w\in W\}$

אם $U\cap W=\{0\}$, נאמר שהסכום $U+W$ הוא **ישר** (ונכתוב $U\oplus W$).

תרגילים:

4.5 תרגיל. יהיו

$.U=\{(a_1,a_2,\dots,a_n)\ :\ a_1=a_2=\dots=a_n\}\ ;V=\{(a_1,a_2,\dots,a_n)\ :\ a_1+a_2+\dots+a_n=0\}$

[א. הוכח ש U,V תת-מרחבים של $\mathbb{F}^n$]

ב. הוכח: $\mathbb{F}^n=U\oplus V$.

ג. עבור מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ נגדיר $\Delta A:=(a_{11},a_{22},\dots,a_{nn})\in\mathbb{F}^n$. יהא U תת-מרחב של $\mathbb{F}^n$, ונגדיר $U_\triangle:=\{A\in\mathbb{F}^{n\times n}\ :\ \Delta A\in U\}$. הוכח ש $U_\triangle$ תת-מרחב של $\mathbb{F}^{n\times n}$.

ד. עבור המרחבים U,V הנ"ל: האם $U_\triangle\oplus V_\triangle=\mathbb{F}^{n\times n}$?

פתרון:

א. טריוויאלי.

ב. נחפש זוג וקטורים כללי מ-V ומ-U אשר יבטאו וקטור כללי מ F^n. כלומר:

$$\forall v=(v_1\ \dots\ v_n)\quad (v_1\ \dots\ v_n)=(k,\dots,k)+(v_1-k\ \dots\ v_n-k):\sum(v_i-k)=\sum v_i-nk=0\Rightarrow$$

$$k=\frac{\sum v_i}{k}$$

$\downarrow$

ממוצע הקואורדינאטות

ולכן:

$$\forall v=(v_1\ \dots\ v_n)$$

$$(v_1\ \dots\ v_n)=\left(\frac{\sum v_i}{n},\dots,\frac{\sum v_i}{n}\right)+\left(v_1-\frac{\sum v_i}{n}\ \dots\ v_n-\frac{\sum v_i}{n}\right):\quad \left(\frac{\sum v_i}{n},\dots,\frac{\sum v_i}{n}\right)\in U\wedge\left(v_1-\frac{\sum v_i}{n}\ \dots\ v_n-\frac{\sum v_i}{n}\right)\in V$$

לגבי החיתוך:

$$\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix} \in V \cap U \Rightarrow nv_1 = 0 \Rightarrow \forall i \quad v_i = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix} = 0$$

ג.

$$\forall A,B \in U_\Delta \qquad \underbrace{\exists\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}}_{A,B\ \text{של}\ \text{אלכסונים}} \in \Delta A$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}}_{A+kB\ \text{של}\ \text{אלכסון}} \in \Delta(A) \Rightarrow A + kB \in U_\Delta$$

ד. לא: $0 \neq A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \wedge A \in U_\Delta \cap V_\Delta$

4.7 תרגיל. יהא V מרחב כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ויהיו U – **הפונקציות הזוגיות** (אלו המקיימות $f(-x)=f(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$), ו W – מרחב **הפונקציות האיזוגיות** (אלו המקיימות $f(-x)=-f(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$).

[א. הוכח ש V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$]

[ב. הוכח ש U,W תת-מרחבים של V]

ג. הוכח: $V=U\oplus W$. (באלים: כל פונקציה ניתנת להצגה בצורה יחידה כסכום של פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית)

פתרון:

א.

$$\forall f,g \in V, k \in R \Rightarrow \forall x \in R \qquad (f+kg)(x) = f(x) + kg(x) \in R \Rightarrow f + kg : R \to R \Rightarrow f + kg \in V$$

קיום האפס והנגדי נובעים מכך ותכונות הקומוטטיביות (לחיבור), דיסטרובוטיביות ואסוציאטיביות ידועות עבור פונקציות.

ב.

$$f(x) = f(-x), g(x) = g(-x) \Rightarrow \forall k \in R \qquad (f+kg)(x) = f(x) + kg(x) = f(-x) + kg(-x) = (f+kg)(-x)$$

$$\Rightarrow \text{ת"מ}\ \ U$$

$$-f(x) = f(-x), -g(x) = g(-x) \Rightarrow \forall k \in R \qquad -(f+kg)(x) = -f(x) - kg(x) = f(-x) + kg(-x) = (f+kg)(-x)$$

$$\Rightarrow \text{ת"מ}\ \ U$$

ג.

$+:$

$$\forall g(x)\in V \qquad g(x)=\frac{\overbrace{g(x)+g(-x)}^{h(x)}+\overbrace{g(x)-g(-x)}^{f(x)}}{2}:\begin{cases}\frac{h(x)}{2}=\frac{g(x)+g(-x)}{2}=\frac{g(-x)+g(x)}{2}=\frac{h(-x)}{2}\Rightarrow\frac{h}{2}\in U\\ \frac{f(x)}{2}=\frac{g(x)-g(-x)}{2}=\frac{-(g(-x)+g(x))}{2}=\frac{-f(-x)}{2}\Rightarrow\frac{f}{2}\in W\end{cases}$$

$$\cap: g\in U\cap W\Rightarrow\forall x\in R \qquad g(x)=g(-x)=-g(x)\Rightarrow 2g(x)=0\Rightarrow g(x)=0\forall x\in R\Rightarrow g=0$$

4.10 תרגיל. יהיו U, V מרחבים וקטוריים מעל שדה $\mathbb{F}$. הוכח: $U\times V=(U\times\{0_V\})\oplus(\{0_U\}\times V)$.

$+:$

$$\forall(u,v)\in U\times V \qquad (u,v)=(u,0)+(0,v)\in(U\times 0)+(0\times V)$$

$\cap:$

$$(u,v)\in(U\times 0)\cap(0\times V)\Rightarrow(u,v)\in(U\times 0)\wedge(u,v)\in(0\times V)\Rightarrow$$
$$u\in U\wedge v\in\{0_V\}\wedge u\in\{0_U\}\wedge v\in V\Rightarrow u=0_U, v=0_V$$

ובסה"כ סכום ישר.