

הגדרה

מרחב טופולוגי (X, T) הוא קבוצה X ומשפחה T של תתי קבוצות של X , המקיימת:

1. $\emptyset, X \in T$

2. אם $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אוסף קבוצות כך ש $U_\alpha \in T$ לכל $\alpha \in I$, אז גם $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in T$

3. אם U_1, U_2, \dots, U_n אוסף סופי של קבוצות כך ש $U_i \in T$ לכל $1 \leq i \leq n$ אז גם $\bigcap_{1 \leq i \leq n} U_i \in T$

במקרה כזה, T תיקרא טופולוגיה על X , והקבוצות ב T יקראו קבוצות פתוחות ב X .

דוגמאות למרחבים טופולוגיים

1. (X, d) מרחב מטרי T אוסף הקבוצות הפתוחות המוגדרות באמצעות המטריקה d .
 T אז נקראת הטופולוגיה המושרה ע"י המטריקה d .

2. X קבוצה כלשהי, $T = \{\emptyset, X\}$. זו נקראת הטופולוגיה הטריטוריאלית על X .

3. לכל קבוצה X אפשר לקחת $T = P(X)$. זו נקראת הטופולוגיה הדיסקרטית על X .

הגדרה

(X, T) יקרא מטריזבילי אם יש מטריקה d על הקבוצה X כך ש d משרה את T .

טענה

הטופולוגיה הדיסקרטית היא מטריזבילית.

הוכחה

קחו את המטריקה הדיסקרטית.

אם ב X יותר מנקודה אחת אז המטריקה הטריטוריאלית איננה מטריזבילית.
נראה שכל מטריקה על X משרה טופולוגיה שאיננה הטופולוגיה הטריטוריאלית. ניקח $a \neq b \in X$ כלשהם. נסמן $r = d(a, b)$ ונביט בקבוצה $U = B(a, r)$:

- U קבוצה פתוחה כי היא כדור פתוח
- $a \in U$ כי $U \neq \emptyset$
- $b \notin U$ כי $U \neq X$

תרגיל

יהי (M, d) מרחב מטרי. אזי לכל $a \in M$ הקבוצה $\{a\}$ סגורה או במילים אחרות $M - \{a\}$ פתוחה. מכאן שיש לנו $|\mathbb{N}|$ קבוצות בנות פתוחות כי האוסף $\{M - \{a\}\}_{a \in M}$ הוא מהעוצמה הזאת.

דוגמה

$$5. \text{ תהי } X \text{ קבוצה, ונגדיר } T = \left\{ A \subseteq X \mid \begin{array}{l} |X - A| < \infty \\ \vee \\ A = \emptyset \end{array} \right\}$$

תרגיל: (א) זוהי טופולוגיה
(ב) עבור X אינסופית X איננה מטריזבילית

הגדרה

יהיו $(X, T), (Y, S), (Z, U)$ שני מרחבים טופולוגיים.
 $f: X \rightarrow Y$ תקרא רציפה אם לכל $U \in S$ מתקיים $f^{-1}(U) \in T$
במילים: לכל $U \subseteq Y$ פתוחה מתקיים ש $f^{-1}(U)$ פתוחה ב X .
עוד יותר במילים: תמונה הפוכה של קבוצה פתוחה היא קבוצה פתוחה.

טענה

אם $(X, T_1), (Y, T_2), (Z, T_3)$ שלושה מרחבים טופולוגיים.
אם $f: X \rightarrow Y$ רציפה ו $g: Y \rightarrow Z$ רציפה אז $g \circ f: X \rightarrow Z$ גם כן רציפה.

הוכחה

תהי $U \subseteq Z$ פתוחה. אזי

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$$

פתוחה ב X .

טענה

1. לכל מרחב טופולוגי (X, T) העתקת הזהות $\text{Id}: X \rightarrow X$ רציפה.

הוכחה: תהי $U \subseteq X$ פתוחה ב X . אזי $\text{Id}^{-1}(U) = U$ לכן כמובן פתוחה ב X .

2. יהיו X, Y מ"ט, $b \in Y$. נגדיר $K_b: X \rightarrow Y$ ע"י לכל $x \in X, K_b(x) := b$. זו נקראת פונקציה קבועה שערכה הקבוע הוא b .

טענה: K_b רציפה

$$K_b^{-1}(U) = \begin{cases} X & b \in U \\ \emptyset & b \notin U \end{cases} \text{ תהי } U \subseteq Y \text{ פתוחה. אזי}$$

הגדרה

יהי X מ"ט, $a \in X$.
 $U \subseteq X$ נקראת סביבה של a אם U פתוחה ו $a \in U$.

הגדרה

יהיו X, Y מ"ט, $f : X \rightarrow Y$, $x \in X$.
אזי f תקרא רציפה ב אם לכל סביבה U של $f(a)$ יש סביבה V של a כך ש $f(V) \subseteq U$.

טענה

$f : X \rightarrow Y$ רציפה אם היא רציפה בכל נקודה $x \in X$.

הוכחה

\Leftarrow נניח f רציפה. תהי $a \in X$. תהי U סביבה של $f(a)$. אזי $f^{-1}(U)$ סביבה של a , ומתקיים $f^{-1}(U) \subseteq U$.

\Rightarrow תהי $U \subseteq Y$ פתוחה. נראה ש $f^{-1}(U)$ פתוחה ב X . תהי $a \in f^{-1}(U)$. כלומר $f(a) \in U$. לכן קיימת סביבה V_a של a כך ש $f(V_a) \subseteq U$, כלומר $V_a \subseteq f^{-1}(U)$. כעת מהלמה השימושית

$$\bigcup_{a \in f^{-1}(U)} V_a = f^{-1}(U)$$

לכן $f^{-1}(U)$ פתוחה.

הגדרה

יהי (X, T) מ"ט ותהי $A \subseteq X$.
טופולוגיית "תת המרחב" על A מוגדרת באופן הבא:
נגדיר אוסף $S \subseteq P(A)$ באופן הבא:

$$S = \{u \subseteq A \mid \exists V \in T, u = V \cap A\}$$

טענה

S היא טופולוגיה על A

הוכחה

1. $\emptyset = \emptyset \cap A$ כי $\emptyset \in S$ •
 $A = X \cap A$ כי $A \in S$ •

2. נניח $\{U_\alpha\}$ אוסף כך שלכל $\alpha \in S$. כלומר לכל α יש $V_\alpha \in T$ כך ש $U_\alpha = V_\alpha \cap A$.
אזי

$$\bigcup U_\alpha = \bigcup (V_\alpha \cap A) = \left(\bigcup V_\alpha \right) \cap A \in S$$

3. נניח $U_1, \dots, U_n \in S$. כלומר לכל i יש $V_i \in T$ כך ש $U_i = V_i \cap A$.

$$\bigcap_{1 \leq i \leq n} U_i = \bigcap_{1 \leq i \leq n} (V_i \cap A) = \left(\bigcap_{1 \leq i \leq n} V_i \right) \cap A \in S$$

הגדרה

$A \subseteq X$. מוגדרת העתקת ההכלה $i : A \rightarrow X$ ע"י $i(a) = a$.

טענה

אם X מ"ט ו $A \subseteq X$ תת מרחב, אזי העתקת ההכלה $i : A \rightarrow X$ רציפה.

הוכחה

תהי $U \subseteq X$ פתוחה ב X .

$$i^{-1}(U) = U \cap A$$

ולכן פתוחה ב A .

הגדרה

אם $f : X \rightarrow Y$ ו $A \subseteq X$ נגדיר $f|_A : A \rightarrow Y$ ע"י $f|_A(a) := f(a)$.
מתקיים ש $f|_A = f \circ i$

טענה

אם $f : X \rightarrow Y$ רציפה, $A \subseteq X$, אז $f|_A : A \rightarrow Y$ רציפה.

הוכחה

$f|_A = f \circ i$ ולכן רציפה.

משפט

יהיו X, Y מ"ט, $f : X \rightarrow Y$ רציפה, $f(X) \subseteq B \subseteq Y$. אזי ניתן להגדיר $\hat{f} : X \rightarrow B$ ע"י $\hat{f}(x) = f(x)$. אזי גם \hat{f} רציפה.

הוכחה

תהי $U \subseteq B$ פתוחה ב- B . צ"ל $\hat{f}^{-1}(U)$ פתוחה ב- X .
 $U = V \cap B$ פתוחה ב- Y כך ש- $V \subseteq Y$ פתוחה ב- Y שקיימת

$$\hat{f}^{-1}(U) = \{x \in X \mid \hat{f}(x) \in U\} = \{x \in X \mid f(x) \in U = V \cap B\} = \{x \in X \mid f(x) \in V\} = \underbrace{f^{-1}(V)}_{\text{open}}$$

לכל $x \in X$ מתקיים ממילא ש- $f(x) \in B$, לכן $f(x) \in V \cap B$ אם $f(x) \in V$.

הערה

למעשה הטענה היא אם \hat{f} רציפה (כהעתקה ל- B) אזי f היא רציפה כהעתקה ל- Y , כי $f = i \circ \hat{f}$.

הגדרה

יהי X מ"ט. $K \subseteq X$ תיקרא סגורה אם K^c פתוחה.

תכונות

מהגדרת טופולוגיה נקבל את התכונות הבאות של קבוצות סגורות:

1. \emptyset, X סגורות
2. אם $\{S_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אוסף כלשהו של קבוצות סגורות אזי $\bigcap_{\alpha \in I} S_\alpha$ קבוצה סגורה.
3. אם S_1, \dots, S_n אוסף סופי של קבוצות סגורות אזי $\bigcap_{1 \leq i \leq n} S_i$ קבוצה סגורה.