89113 – אלגברה ליניארית 2/ תרגיל 4

שאלה 1

חשבו את הפולינום האופייני, הערכים העצמיים והוקטורים העצמיים המתאימים עבור המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}3&-2&0\\-2&3&0\\0&0&5\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\4&-17&8\end{pmatrix}$$

תשובה

$$A:\quad p(x)=(1-x)^2(-x)\qquad \lambda_1=1\qquad \lambda_2=0$$

$$v_1=(a,0,0)^t\qquad v_2=(-a,a,0)^t$$

$$B: p(x)=(x-1)(x-5)^2\qquad \lambda_1=1\qquad \lambda_2=5$$

$$v_1=(a,a,0)^t\qquad v_{21}=(-a,a,0)^t\quad v_{22}=(0,0,a)^t$$

$$C: p(x)=(4-x)(x^2-4x+1)\qquad \lambda_1=4\qquad \lambda_{2,3}=5\pm\sqrt{3}$$

$$v_1=\left(\frac{a}{16},\frac{a}{4},a\right)^t\qquad v_+=\left(\frac{a}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2},\frac{a}{2+\sqrt{3}},a\right)^t\qquad v_-=\left(\frac{a}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2},\frac{a}{2-\sqrt{3}},a\right)^t$$

שאלה 2

נתון אופרטור הגזירה במרחב הפולינומים: $\frac{d}{dx}:R_3[x]\to R_3[x]$.

א. הוכיחו כי זו העתקה ליניארית.
ב. מצאו את הערכים העצמיים שלה, ואת הוקטורים העצמיים המתאימים.

תשובה

נסתכל על המטריצה המייצגת של $\frac{d}{dx}$ בבסיס הסטנדרטי $B=\langle 1,x,x^2,x^3\rangle$: $\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$. נחשב את

הפ"א:

$$\left|\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}-I\lambda\right|=\begin{vmatrix}-\lambda&1&0&0\\0&-\lambda&2&0\\0&0&-\lambda&3\\0&0&0&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^4$$

לכן הע"ע היחיד הוא 0, וידוע לנו ש

$$\frac{d}{dx}p(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad p(x)=c$$

לכן הו"ע היחידים הם הפולינומים הקבועים.

שאלה 3

יהי $c\in R$. הוכיחו כי אם במטריצה $A\in F^{n\times n}$ סכום כל שורה הוא c אז c הוא ע"ע של A

תשובה

נסתכל על הוקטור $v=(1,1,...,1)^t\in F^n$: $Av=\left(\sum a_{1i},\sum a_{2i},...,\sum a_{ni}\right)^t=(c,c,...,c)=c(1,1,...,1)$.

לכן c הוא ע"ע של A עם הו"ע v.

שאלה 4

הוכיחו כי אם $T:V\to V$ היא הע"ל הפיכה עם ע"ע $\lambda_1,...,\lambda_n$ אז הע"ע של T^{-1} הם $\frac{1}{\lambda_1},...,\frac{1}{\lambda_n}$ בלבד.

תשובה

יהי $v\in V$. אם $Tv=\lambda v$ אז $v=T^{-1}Tv=T^{-1}\lambda v=\lambda T^{-1}v$. אפשר לחלק משוואה זו ב λ (כי T הפיכה ולכן אין לה ע"ע 0) ולקבל $T^{-1}v=\frac{1}{\lambda}v$. אותו טיעון בחילוף תפקידיהן של T,T^{-1} יניב את ההוכחה של "בלבד".

שאלה 5

מצאו את כל המרחבים האינווריאנטים של ההעתקה $T:Q^2\to Q^2$, $T(v)=Av$ כאשר $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\end{pmatrix}$. (שימו לב שהשדה הוא המספרים הרציונליים).

תשובה

כמובן $Q^2,\{0\}$ הם מרחבים אינווריאנטים טריוויאליים. נוכיח שאין עוד נוספים: אם V הוא מרחב אינווריאינטי לא טריוויאלי אז בהכרח המימד שלו, n שונה מ 0 ו 2. כלומר הוא נפרש ע"י וקטור אחד, ולכן וקטור זה חייב להיות ו"ע (כי $Av\in span\{v\}\Leftarrow Av=\lambda v$).

כעת, הע"ע של ההעתקה הם שורשי הפולינום $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda)-1 = \lambda^2 - 5$, אבל שורשי הפולינום $\left(\pm\sqrt{5}\right)$ אינם בשדה Q ולכן אין להעתקה ע"ע. מכאן שאין ו"ע כנ"ל ולכן אין מרחב אינווריאנטי לא טריוויאלי.

שאלה 6

הוכיחו כל הווקטורים השונים מאפס הם וקטורים עצמיים של העתקה ליניארית T אם ורק אם T העתקת דמיון, כלומר: אם ורק אם קיים $\alpha \in F$ יחיד כך ש $T(v) = \alpha v$ לכל $v \in V$.

תשובה

ברור שכוון אחד הוא טריוויאלי, לכן נוכיח רק את הטענה שאם כל וקטורים של מרחב וקטורי הם עצמיים, אזי ההעתקה היא העתקת דמיון: נניח שזה לא נכון, ז"א יש $\lambda_1 \neq \lambda_2$ וגם $v_1 \neq 0, v_2 \neq 0 \in V$ כך ש- $T(v_1) = \lambda_1 v_1; T(v_2) = \lambda_2 v_2$. מזה נובע ש- v_1, v_2 בת"ל (למה?), וג"כ $T(v_1 + v_2) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \neq \alpha(v_1 + v_2)$ בגלל אי-תלות של וקטורים.