פיתרון תרגיל בית 5 במתמטיקה בדידה 2

10 ביוני 2019

1. מספר התלמידים בכיתה הוא 34. ציון של תלמיד הוא מספר שלם בין אפס לבין מאה, כולל. מצאו כמה אפשרויות יש להעניק ציונים לתלמידים כך שהציון הממוצע בכיתה יהיה 87. (רמז: מה צריך להיות סכום הציונים?)

פתרון:

ישנם 34 סטודנטים. נסמן ב x_i את הציון שקיבל סטודנט i (כאשר $1 \leq i \leq 34$).
כיוון שהממוצע הוא 87 מתקיים כי

$$\frac{\sum_{i=1}^{34} x_i}{34} = 87$$

כאשר $0 \leq x_i \leq 100$ לכל i. המשוואה שקולה לכך שמתקיים כי $\sum_{i=1}^{34} x_i = 2958 = 87 \cdot 34$. נגדיר את הקבוצות הבאות:

U מספר האפשרויות לפתור את המשוואה כאשר יש רק את האילוצים $0 \leq x_i$ ללא האילוצים הנוספים $x_i \leq 100$.

לכל i נגדיר את A_i להיות קבוצת האפשרויות לפתור את המשוואה כאשר $x_i \geq 101$ ואין אילוצים על המשתנים האחרים (כלומר לכל j ששונה מ i יתכן כי $x_j \leq 100$).

מסקנה: הקבוצה $A_i \cap A_j$ מכילה את האפשרויות לפתור את המשוואה כאשר $x_i \geq 101 \wedge x_j \geq 101$.

וכך הלאה לגבי שאר האפשרויות לחיתוכים של קבוצות.

כעת, נחשב את הגדלים של הקבוצות (והחיתוכים שלהן...):

כיוון שבקבוצה U אין שום אילוץ על x_i־ים, אז זאת פשוט הנוסחה של מנייה בלי סדר ועם חזרה, ונקבל $|U| = \binom{34+2958-1}{34-1}$.

לכל i, עבור חישוב A_i, סטונדט i קיבל לפחות 101 נקודות, כלומר קיים האילוץ $x_i \geq 101$. נשים לב שבמקום המשוואה

$$\sum_{i=1}^{34} x_i = 2958$$

עם האילוצים $x_i \geq 101$ ולכל $j \neq i$ $x_j \geq 0$, אפשר להסתכל על המשוואה

$$\sum_{i=1}^{34} x_i = 2958 - 101$$

עם האילוצים $x_j \geq 0$ לכל j.
ולכן הגודל של A_i הוא $|A_i| = \left(\!\binom{34}{2857}\!\right)$.

באופן דומה עבור $A_i \cap A_j$ ניתן לחשוב על המשוואה

$$\sum_{i=1}^{34} x_i = 2958 - 202$$

עם האילוצים $x_j \geq 0$ לכל j. ובאופן דומה נקבל כי $|A_i \cap A_j| = \left(\!\binom{34}{2756}\!\right)$.

ניתן לראות עקביות: עד לחיתוך של $29 = \frac{2958}{101}$ (מעוגל למטה) של קבוצות (לא יכול להיות ש־30 ומעלה תלמידים קיבלו מעל 100, השאר קיבלו ציון לא שלילי והממוצע 87, ולכן עוצמת החיתוך של 30 ומעלה קבוצות היא 0 ולא תורמת בנוסחת ההכלה והדחה כלום).

כעת נוכל לחשב את גודל הקבוצה

$$\bigcap_{i=1}^{34} A_i^c$$

כי זאת בדיוק קבוצת כל הפתרונות למשוואה כך שלכל i מתקיים $x_i \leq 100$ ביחד עם התנאי שחוזר בכל הקבוצות של $0 \leq x_i$, וזהו הגודל המבוקש בשאלה. נחשב אותו בעזרת הכלה־הדחה. מתקיים

$$\bigcap_{i=1}^{34} A_i^c = \left(\bigcup_{i=1}^{34} A_i\right)^c = U \setminus \bigcup_{i=1}^{34} A_i$$

ולכן הגודל המבוקש הוא $|U| - \left|\cup_{i=1}^{34} A_i\right|$ נחשב בעזרת נוסחת להכלה־הדחה

$$\begin{aligned}|U| - \left|\cup_{i=1}^{34} A_i\right| &= |U| - \sum_{i=1}^{34} |A_i| + \sum_{i,j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i,j,k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots \\ &= \binom{34}{0} |U| - \binom{34}{1} |A_i| + \binom{34}{2} |A_i \cap A_j| - \binom{34}{3} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots\end{aligned}$$

ונקבל בסופו של דבר:

$$\sum_{i=0}^{29} (-1)^i \cdot \binom{34}{i} \cdot \left(\!\binom{34}{2958 - i \cdot 101}\!\right)$$

2. n אנשים נכנסים למסעדה. לכל אחד מהם מעיל ועניבה. בסיום הארוחה הם ממהרים לעזוב וכל אחד מהם לוקח מעיל ועניבה כלשהם. מה מספר האפשרויות שבהן אף אחד מהם לא יקבל בחזרה הן את מעילו והן את עניבתו (ייתכן שמישהו יקבל את המעיל או העניבה, אך לא את שניהם)?

<u>פתרון:</u>

נקרא לבחירה אקראית של מעיל ועניבה "ערבוב". נסמן כמה קבוצות שתהיינה הרכיבים הדרושים להוכחה:

A_i תהיה קבוצת האפשרויות שלקוח i יקבל את העניבה שלו והמעיל שלו.

נשים לב שאחרי שקבענו לאן הולך כובע ועניבה אחת בחירת השאר היא ערבוב של העניבות והמעילים ולכן $|A_i| = ((n-1)!)^2$.

U תהיה קבוצת האפשרויות לקבלת מעיל ועניבה (קבוצה אוניברסלית).

נשים לב שכל אפשרות היא בעצם ערבוב של העניבות ושל המעילים ולכן $|U| = (n!)^2$.

$A_i \cap A_j$ קבוצת האפשרויות שלקוחות j, i יקבלו, כל אחד, את העניבה שלו והמעיל שלו.

קבענו שתי עניבות ושני מעילים, ונותר לקבוע את השאר. זה בעצם ערבוב של העניבות והמעילים של השאר, כלומר: $|A_i \cap A_j| = ((n-2)!)^2$.

באופן דומה, נבדוק מה גודלה של קבוצת האפשרויות ש־k לקוחות ספציפיים יקבלו את העניבה והמעיל שלהם.

קבענו k עניבות ו־k מעילים, ונותר לקבוע את השאר. זה בעצם ערבוב של עניבות ומעילים של השאר, כלומר: $((n-k)!)^2$.

רוצים שאף אחד לא יקבל גם מעיל וגם עניבה ולכן לסיכום בעזרת עקרון ההכלה־הדחה נקבל:

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right| = \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c\right| = |U| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| =$$

$$= |U| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| - \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots =$$

$$= \binom{n}{0}\cdot(n!)^2 - \binom{n}{1}\cdot((n-1)!)^2 + \binom{n}{2}\cdot((n-2)!)^2 - \binom{n}{3}\cdot((n-3)!)^2 + \cdots + (-1)^k\binom{n}{k}((n-k)!)^2 + \ldots =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \cdot ((n-i)!)^2$$

3. לכמה סדרות מאורך n בספרות $\{0,1,2,3\}$ יש התכונה: כל אחת מהספרות 1,2,3 מופיעה לפחות פעם אחת?

<u>פתרון:</u>

נסמן ב־U את קבוצת כל הסדרות בספרות $\{1,2,3,4\}$. נסמן ב־A_1 את קבוצת הסדרות בהן הספרה 1 לא מופיעה, ב־A_2 את קבוצת הסדרות בהן הספרה 2 לא מופיעה, וב־A_3 את קבוצת הסדרות בהן הספרה 3 לא מופיעה. אנחנו צריכים לחשב את $A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c = (A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c = |U| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$. ניעזר בנוסחת ההכלה והדחה:

ראשית, $|U| = 4^n$.

נחשב את גדלי הקבוצות ואת החיתוכים: לכל $1 \leq i \leq 3$ מתקיים: $|A_i| = 3^n$ (כי ניתן לבחור רק משלושת הספרות האחרות). בדומה, לכל $1 \leq i < j \leq 3$ מתקיים: $|A_i \cap A_j| = 2^n$ (וראוי לציין שיש 3 אפשרויות של חיתוכים). ולבסוף, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1$ (סדרה רק מהספרה 4). ולכן נקבל:

$$A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c = (A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c = |U| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 4^n - (3\cdot 3^n - 3\cdot 2^n + 1) = 4^n - 3^{n+1} + 3\cdot 2^n - 1$$

4. מצאו כמה מספרים בין 1 ל־300 מתחלקים לפחות באחד מהבאים: $2,3,5$, והסיקו מכך את $\phi(300)$.

<u>פתרון:</u>

נסמן ב־A_i את המספרים בין 1 ל־300 המתחלקים ב־i. אנחנו מחפשים את $|A_2 \cup A_3 \cup A_5|$.

נחשב את גדלי הקבוצות: $|A_2| = \left\lfloor \frac{300}{2} \right\rfloor = 150, |A_3| = \left\lfloor \frac{300}{3} \right\rfloor = 100, |A_5| = \left\lfloor \frac{300}{5} \right\rfloor = 60$.

והחיתוכים: $|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{300}{6} \right\rfloor = 50, |A_2 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{300}{10} \right\rfloor = 30, |A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{300}{15} \right\rfloor = 20, |A_2 \cap A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{300}{30} \right\rfloor = 10$.

ולכן כמות המספרים בין 1 ל־300 המתחלקים לפחות באחד מהבאים: $2,3,5$, היא: $150 + 100 + 60 - (50 + 30 + 20) + 10 = 220$.

כעת, $\phi(300)$ זה המספרים בין 1 ל־300 הזרים ל־300, ולכן זה המשלים:

$$\phi(300) = 300 - 220 = 80.$$

5. נסמן ב־A את קבוצת אותיות הא"ב. תמורה על אותיות הא"ב היא פונקציה הפיכה $f : A \to A$. ניתן לכתוב תמורה כזו כטבלה עם שתי שורות, בעליונה רושמים את

האותיות (לפי הסדר הרגיל), ובשנייה רושמים מתחת לכל אות את התמונה שלה.

לדוגמא (רק חלק מהפונקציה):

ת	ש	ר	...	ג	ב	א	a
ג	פ	ר	...	ד	ל	י	$f(a)$

.

(א) כמה תמורות על A מכילות ברצף לפחות אחת מהמילים הבאות: ראש, יד, פה?

(ב) כמה תמורות על A אינן מכילות ברצף אף אחת מהמילים הבאות: רגל, נעל, יחפה?

<u>**פתרון:**</u>

א. גם כאן נסמן ב־ A_1 את התמורות המכילות את המילה ראש, ב־ A_2 את התמורות המכילות את המילה יד, וב־ A_3 את התמורות המכילות את המילה פה, וכמובן נדרשים לחשב את גדולי הקבוצות והחיתוכים.

נתבונן בתמורות בהן מופיעה במילה ראש. למעט 2 המיקומים שאחרי האות ר', השאר זה בעצם תמורה על 20 אותיות. לכן $|A_1| = 20!$, ובדומה $|A_2| = |A_3| = 21!$.

באותה דרך, כדי לחשב למשל את $|A_1 \cap A_2|$ נשים לב שלמעט המיקום שאחרי האות י' (במילה יד), ושני המיקומים שאחרי ר' (במילה רגל) השאר זה תמורה רגילה, ולכן $|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = 19!, |A_2 \cap A_3| = 20!$, ובדומה: $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 18!$. ובסה"כ:

$$20! + 2 \cdot 21! - (20! + 2 \cdot 19!) + 18! = 2(21! - 19!) + 118!$$

ב. דומה מאד לפיתרון של הסעיף הקודם, עם שני שינויים:

ראשית, אנחנו מחשבים את המשלים של מה שעשינו קודם, כאשר $|U| = 22!$.

בנוסף, כאן יש חיתוך לא אפשריי, לא יכול להיות שגם המילה רגל וגם המילה נעל מופיעות (בגלל האות ל' המשותפת). נקבל:

$$22! - (2 \cdot 20! + 19!) + (2 \cdot 17! + 0) - 0 = 22! - 2(20! - 17!)$$

6. בכמה דרכים ניתן לסדר את הספרות $1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3$ בשורה כך שלא תהיה שלשה צמודה מאותה ספרה?

<u>**פתרון:**</u>

נחשב את המשלים, כאשר $|U| = \binom{9}{3,3,3} = \frac{9!}{3! \cdot 3! \cdot 3!} = 1680$/

הסידורים בהן שלשת האחדות כן צמודה הם: נחשוב על זה כסידור בשבעה מיקומים, כאשר בחירת מיקום האחדות ($\binom{7}{1}$ אפשרויות) ובחירת מיקומי ה־2 (נותרו שישה

מיקומים, ולכן יש $\binom{6}{3}$ אפשרויות) קובעת את מיקומי ה־3. סה"כ: $= \binom{7}{1} \cdot \binom{6}{3}$
$140 = \frac{7!}{3!\cdot 3!} = \binom{7}{1,3,3}$.

בדומה, חיתוך ייתן לנו $20 = \frac{5!}{3!} = \binom{5}{1,1,3}$ וחיתוך השלושה זה פשוט סידור השלשות: $3! = 6$. בסה"כ:

$$1680 - 3 \cdot 140 + 3 \cdot 20 - 6 = 1314$$