

תרגיל בית 3 אינפי 3

1. יהי (X, d) מרחב מטרי ותהי $a_n \in X$ סדרה. הוכיחו כי $a_n \rightarrow a$ אם ורק אם לכל קבוצה פתוחה P כך ש $a \in P$ קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $a_n \in P$.

2. תהי $a_n \in \mathbb{R}^n$ סדרה של וקטורים. באופן טבעי נאמר כי הטור

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

מתכנס אם סדרת הסכומים החלקיים

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

מתכנסת. הוכיחו כי אם טור המספרים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$$

מתכנס אזי גם טור הוקטורים

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

מתכנס.

3. האם הגבולות הבאים קיימים? אם כן, מצאו אותם.

(א)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$$

(ב)

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^4 + y^4 + z^4}$$

(ג)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$$

(ד)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + 3y^2}}$$

4. האם קיים $a \in \mathbb{R}$ כך שהפונקציה הבאה תהיה רציפה בנקודה $(0,0)$?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} & xy \neq 0 \\ a & \text{תרחא} \end{cases}$$

5. האם הפונקציות הבאות רציפות בנקודה $(0,0)$?

(א)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{תרחא} \end{cases}$$

(ב)

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^4 + y^4) \ln(x^2 + y^2) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{תרחא} \end{cases}$$

6. (א) תהי $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה כאשר $D \subseteq \mathbb{R}^n$. תהי x_0 נקודת הצטברות של D .

נניח כי

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$$

כאשר x_0 נקודת הצטברות של כל D_i . אז מתקיים ש

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

אם ורק אם לכל i

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f|_{D_i}(x) = L$$

(רמז: השתמשו בהגדרת גבול לפי היינה)

(ב) הראו כי הטענה לא נכונה אם מחליפים את האיחוד הסופי באיחוד אינסופי.

7. האם הגבולות הבאים קיימים? אם כן, מצאו אותם. מצאו גם את הגבולות החוזרים בכל מקרה (אם הם קיימים).

(א)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x+y}$$

(ב)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) \sin\left(\frac{1}{y}\right) \right)$$

(ג)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

(ד)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x + \sin(y)}{x + y}$$