

שם הקורס: טופולוגיה

שם המרצה: פרופ' מגרל

מתרגלים: מני וסולי

תרגיל בית מספר 5

שאלה 1

שאלה זו מציגה את הוכחתו של פרופ' פורסטנברג לקיומם של אינסוף מספרים ראשוניים באמצעות הטופולוגיה הפרו סופית. מותר ורצוי להשתמש במה שהוכחנו בתרגול לגבי טופולוגיה זו.

כזכור, סדרה חשבונית דו צדדית היא קבוצה $(a \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{N}) S = a + d\mathbb{Z} = \{a + dk \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

נגדיר על \mathbb{Z} את הטופולוגיה הפרו סופית בדרך הבאה:

$O \in \tau_{pro}$ אם $x \in O$ לכל $S = x + d\mathbb{Z}$ יש סדרה חשבונית דו צדדית $x \in S$ כך ש-
 $x \in S \subseteq O$.

1. הוכיחו כי $\cup p\mathbb{Z} = \mathbb{Z} - \{1, -1\}$ (האיחוד הוא על כל המספרים הראשוניים).
2. הוכיחו כי $\mathbb{Z} - \{1, -1\}$ אינה סגורה.
3. הסיקו כי ישנם אינסוף מספרים ראשוניים.

שאלה 2

הוכיחו:

- א. כל פונקציה ממרחב טופולוגי דיסקרטי לכל מרחב טופולוגי אחר – הינה רציפה.
- ב. כל פונקציה ממרחב טופולוגי כלשהו למרחב הטופולוגי הטריטוריאלי - הינה רציפה.
- ג. תהי $f: (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$ רציפה. נניח כי $\tau_3 \subseteq \tau_2$ וגם $\tau_1 \subseteq \tau_4$. הוכיחו כי $f: (X, \tau_4) \rightarrow (Y, \tau_3)$ רציפות.

שאלה 3

תהי X קבוצה לא ריקה עם הטופולוגיה הקו-סופית. האם המרחב $(X, \tau_{\text{cofinite}})$ קשיר? (רמז: תלוי בעוצמה של X).

שאלה 4

א. מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה הבאה אינה רציפה:

$$f: (\mathbb{R}, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau), \quad f(x) = 2x$$

כאשר $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, \{2\}\}$.

ב. הוכח או הפרך: קיימת טופולוגיה τ על \mathbb{R} ופונקציות רציפות $f, g: (\mathbb{R}, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau)$ כך

$$f + g: (\mathbb{R}, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau)$$

ש אינה רציפה.

שאלה 5

האם הישר של סורגנפריי קשיר?

שאלת בונוס

יהי X מ"ט. יהיו $A, B \subseteq X$ ונניח ששתייהן פתוחות או ששתייהן סגורות. נניח בנוסף ש $A \cap B$ קשיר וגם $A \cup B$ קשיר. הוכיחו ש A, B קשירים (כתתי מרחב טופולוגיים של X).

בהצלחה!