תרגול 12

רציפות בהחלט:

הגדרה: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ נקראת רציפה בהחלט אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $\{[a_k,b_k]\}_{k=1}^{n}$ הם קטעים זרים שסכום אורכם קטן מ- δ אזי $\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$.

<u>תרגיל:</u> תהיינה $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפות בהחלט ו- c קבוע. הוכיחו:

א. cf רציפה בהחלט.

ב. $f+g$ רציפה בהחלט.

ג. fg רציפה בהחלט.

<u>פתרון:</u>

א. יהי $\varepsilon>0$ ע"פ הגדרת הרציפות בהחלט של f, עם $\varepsilon\mapsto\frac{\varepsilon}{|c|}$ נקבל כי קיים $\delta>0$ כך שאם $\{[a_k,b_k]\}_{k=1}^{n}$ הם קטעים זרים שסכום אורכם קטן מ- δ אזי $\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\frac{\varepsilon}{|c|}$.

עבור אותו δ, בהינתן קטעים $\{[a_k,b_k]\}_{k=1}^{n}$ עם סכום אורכים קטן מ- δ, נקבל כי

$$\sum_{k=1}^{n}|cf(b_k)-cf(a_k)|=\sum_{k=1}^{n}|c||f(b_k)-f(a_k)|=|c|\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|=<|c|\frac{\varepsilon}{|c|}=\varepsilon$$

ב. ע"פ הגדרת הרציפות בהחלט של f, ישנו $\delta_1>0$, כך שאם $\{[a_k,b_k]\}_{k=1}^{n}$ הם קטעים זרים שסכום אורכם קטן מ- δ_1 אזי $\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\frac{\varepsilon}{2}$. ע"פ הרציפות בהחלט של g ישנו $\delta_2>0$, כך שאם $\{[a_k,b_k]\}_{k=1}^{n}$ הם קטעים זרים שסכום אורכם קטן מ-δ_2 אזי $\sum_{k=1}^{n}|g(b_k)-g(a_k)|<\frac{\varepsilon}{2}$. נגדיר $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$ אם $\{[a_k,b_k]\}_{k=1}^{n}$ הם קטעים זרים שסכום אורכם קטן מ- δ אזי,

$$\sum_{k=1}^{n}|(f+g)(b_k)-(f+g)(a_k)|\le\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|+\sum_{k=1}^{n}|g(b_k)-g(a_k)|<\varepsilon$$

ג. f,g רציפות בקטע סגור, ולכן חסומות (כלומר $|f(x)|,|g(x)|\le M$ לאיזשהו M)

ע"פ הגדרת הרציפות בהחלט (לשתי הפונקציות) ישנו $\delta>0$ כך שאם $\left\{[a_k,b_k]\right\}_{k=1}^{n}$ הם קטעים זרים שסכום אורכם קטן מ- δ אזי $\sum_{k=1}^{n}\left|f(b_k)-f(a_k)\right|,\sum_{k=1}^{n}\left|g(b_k)-g(a_k)\right|<\frac{\varepsilon}{2M}$. עבור אותו δ נקבל:

$$\sum_{k=1}^{n}\left|(fg)(b_k)-(fg)(a_k)\right|=\sum_{k=1}^{n}\left|f(b_k)g(b_k)-f(a_k)g(a_k)-f(b_k)g(a_k)+f(b_k)g(a_k)\right|\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{n}\left|f(b_k)\left(g(b_k)-g(a_k)\right)\right|+\sum_{k=1}^{n}\left|g(a_k)\left(f(b_k)-f(a_k)\right)\right|<2M\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon$$

<u>הגדרה:</u> נאמר כי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ מקיימת את **תנאי ליפשיץ**, אם יש קבוע L כך שלכל $x,y\in[a,b]$ מתקיים $\left|f(x)-f(y)\right|\le L\left|x-y\right|$.

<u>תרגיל:</u>

א. הוכיחו כי אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ מקיימת את תנאי ליפשיץ, אזי היא רציפה בהחלט.

ב. נניח כי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ היא ממחלקה C^1 (גזירה ברציפות). הוכיחו כי היא מקיימת את תנאי ליפשיץ.

<u>פתרון:</u>

א. יהי $\varepsilon>0$. נניח כי $\left\{[a_k,b_k]\right\}_{k=1}^{n}$ הם קטעים זרים שסכום אורכם קטן מ- $\delta=\frac{\varepsilon}{L}$, אם כך

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f(b_k)-f(a_k)\right|\le\sum_{k=1}^{n}\left|L\left|b_k-a_k\right|\right|<\varepsilon$$

ב. מהנתון f' רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ ולכן חסומה שם ($\left|f'(x)\right|\le M$). יהיו $x,y\in[a,b]$ כלשהם, ע"פ משפט הערך הממוצע של לגראנז' מתקיים

$\left|f(x)-f(y)\right|=\left|f'(\xi)(x-y)\right|=\left|f'(\xi)\right|\left|x-y\right|\le M\left|x-y\right|$ עבור ξ כלשהו בין x ל- y.

וזהו בדיוק תנאי ליפשיץ. (בעתיד נוכיח את ב' עם הנחות מקלות יותר).

משפט (הרחבה למשפט היסודי של החדו"א ב'): תהי f מוגדרת ורציפה בהחלט ב $[a,b]$. אזי $f'(x)$ קיימת כב"מ ב $[a,b]$ ואינטגרבילית שם, ומתקיים

$$\int_a^b f'(x)=f(b)-f(a).$$

הערה: אם יש קפיצה של הפונקציה $f(x)$ אזי ברור כי לא יתקיים $\int_a^b f'(x)=f(b)-f(a)$ מכייון שהאינטגרל לא יסכום את הקפיצה. מצד שני התנאי ש $f(x)$ הינה רציפה בהחלט הכרחי.

לדוגמא, נניח כי $f(x)$ הינה פונקצית קנטור. ראינו בתרגול כי עבור פונקציית קנטור $f'(x)=0$ כב"מ. לכן

$$.\int_0^1 f'(x)dx=0\neq 1=f(1)-f(0)$$

למרות שפונקצית קנטור רציפה.

1. <u>תרגיל:</u> תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

1. f רציפה בהחלט, $f'(x)\in\{0,1\}$ כב"מ (dm) ו- $f(0)=0$

2. קיימת קבוצה $A\subseteq[0,1]$, מדידה לבג כך ש- $f(x)=m\left(A\cap(0,x)\right)$

פתרון:

$1\Leftarrow 2$ נגדיר $A:=\{x\in[0,1]:f'(x)=1\}$. בגלל ש-f רציפה היא מדידה, ולכן גם הנגזרת שלה 'f מדידה (תרגול שעבר) ומכאן שהקבוצה A מדידה. עכשיו בגלל ש-f רציפה בהחלט:

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'dm=\int_0^x f'dm=\int_0^x I_A dm=\int_0^1 I_{A\cap(0,x)}dm=m\left(A\cap(0,x)\right)$$

$2\Leftarrow 1$ $\int_0^x I_A dm=m\left(A\cap(0,x)\right)=f(x)$ ומכאן f רציפה בהחלט (הכללת לבג חלק א')

ע"פ הכללת לבג $f'(x)=I_A(x)$ כב"מ, ולכן $f'(x)\in\{0,1\}$ כב"מ. ופשוט לראות כי $f(0)=0$.

משפט: פונקצית בורל f על הקטע $[a,b]$ הינה אינטגרבילית רימן אמ"מ קבוצת הנקודות שבה f איננה רציפה בקטע הינה בעלת מידת לבג 0 ואז אינגרל רימן שווה לאינטגרל לבג.

דוגמא: נניח כי $[a,b]=[0,1]$ וכי $f(x)=1_A$ כאשר A הינה קבוצת הרציונאליים. במקרה כזה נקבל כי הפונקציה f איננה רציפה באף נקודה ולכן איננה אינגרבלית רימן.

דוגמא: נגדיר את הפונקציה $f(x)$ להיות שווה לאפס אם x הינו אי-ראציונאלי ו $\frac{1}{q}$ כאשר x ראציונאלי ושווה ל $\frac{p}{q}$ בצורה מצומצמת. קל לראות כי הפונקציה איננה מדידה באף נקודה ראציוניאלית. לעומת זאת, אם x איננו ראציונאלי אזי לכל $\varepsilon > 0$ יש מספר סופי של ראציונאליים כך ש $f(q) > \varepsilon$ לכן נוכל למצוא סביבה של x כך שלכל y כך ש $|y-x| < \delta$ מתקיים כי $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. מכאן רואים כי f רציפה פרט למספר סופי של נקודות ולכן אינטגרבילית רימן והאינטגרל שווה ל 0.

<u>משפט:</u> נניח כי האינטגרל הלא אמיתי של f בקרן $[a,\infty)$ מתכנס בהחלט (ז"א $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ וגם כמובן $\int_a^{\infty} f^+ dx, \int_a^{\infty} f^- dx < \infty$) אזי f אינט' לבג בקרן $[a,\infty)$ ומתקיים

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \int_{[a,\infty)} fdm$$

<u>הוכחה:</u> נגדיר סדרת פונקציות $g_n = f^+ I_{[a,a+n]}$ אזי $\{g_n\}$ סדרה מונוטונית עולה של פונקציות אי-שליליות שגבולן f^+ ומתקיים

$$\int_a^{\infty} f^+(x) dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^{a+n} f^+(x) dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,a+n]} f^+ dm = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,\infty)} g_n dm = \int_{[a,\infty)} f^+ dm$$

. וכנ"ל f^- .