בוחן - מבוא לתורת החבורות תשע"ז

משך הבוחן 90 דקות. נא לכתוב שם ותעודת זהות. יש לענות על כל השאלות. משקל כל שאלה 25 נקודות. בשאלות עם 2 סעיפים משקל כל סעיף 12.5 נקודות.
נמקו היטב תשובותיכם!

שאלה 1 מצאו את ההופכי של

$$184^{242}$$

בחבורה U_{45}. בטאו את ההופכי על ידי נציג שהוא מספר בין 1 ל 44. הציגו חישובים מלאים.
פתרון: עובדים מודולו 45. קודם כל נשים לב ש $4 = 184$. אח"כ נשים לב ש $\varphi(45) = \varphi(9)\varphi(5) = 6 \cdot 4 = 24$ ולכן

$$4^{242} = 4^{240} \cdot 4^2 = 16$$

אז צריך למצוא את ההופכי של 16.

$$45 = 2 \cdot 16 + 13$$

$$16 = 13 + 3$$

$$13 = 4 \cdot 3 + 1$$

ועושים חישוב אחורה

$$\begin{aligned} 1 &= 13 - 4 \cdot 3 = 13 - 4 \cdot (16 - 13) = -4 \cdot 16 + 5 \cdot 13 \\ &= -4 \cdot 16 + 5 \cdot (45 - 2 \cdot 16) = 5 \cdot 45 - 14 \cdot 16 \end{aligned}$$

ולכן

$$16^{-1} = -14 = 31$$

שאלה 2

1. האם קיים מונומורפיזם

$$f : \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$

(הפעולה של החבורה $\mathbb{Q}$ היא חיבור).
פתרון: לא. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ לא אבלית ולכן אי אפשר לשכן אותה בתוך חבורה אבלית. במילים אחרות: נניח שיש f כנ"ל ניקח $a, b \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ כך ש

$$ab \neq ba$$

ואז בגלל ש f חד חד ערכית אז

$$f(ab) \neq f(ba)$$

כלומר

$$f(a)f(b) \neq f(b)f(a)$$

בסתירה לכך שהחבורה בצד ימין היא אבלית.

2. האם קיים מונומורפיזם

$$f : G \to H$$

כאשר

$$G = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

$$H = (\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot).$$

פתרון: לא. ב G יש הרבה איברים מסדר סופי (למשל $1, -1, i, -i$) אם היה מונומורפיזם כזה אז הם היו צריכים להישלח לאיברים שונים מסדר סופי. אבל ב H יש רק שני איברים מסדר סופי והם ± 1.

שאלה 3

1. תהי G חבורה. נגדיר פונקציה $f : G \to G$ לפי

$$f(g) = g^2$$

הוכיחו כי f היא הומומורפיזם אם ורק אם G אבלית.
פתרון: אם G אבלית אז

$$f(ab) = (ab)^2 = abab = aabb = f(a)f(b)$$

מצד שני אם f הומומורפיזם אז לכל $a, b \in G$ מתקיים

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

כלומר

$$abab = aabb$$

ועל ידי צמצום נקבל

$$ba = ab$$

2. תהי G חבורה ויהיו $a, b \in G$. הראו כי אם $\mathrm{o}(ab)$ סופי אז גם $\mathrm{o}(ba)$ סופי ומתקיים $\mathrm{o}(ab) = \mathrm{o}(ba)$.
פתרון: זה היה בתרגילי בית. אבל לא אכפת לי לעשות copy paste לפתרון

נניח

$$(ab)^n = e$$

שימו לב שאפשר לכתוב זאת גם ככה:

$$a(ba)^{n-1}b = e$$

ולכן

$$(ba)^{n-1}b = a^{-1}$$

ועל ידי כפל מימין ב a נקבל

$$(ba)^{n-1}ba = e$$

כלומר

$$(ba)^n = e$$

באופן דומה מוכיחים שאם $(ba)^n = e$ אז $(ab)^n = e$. ולכן

$$\{k \in \mathbb{N} \mid (ab)^k = e\} = \{k \in \mathbb{N} \mid (ba)^k = e\}$$

ממילא

$$\mathrm{o}(ab) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid (ab)^k = e\} = \min\{k \in \mathbb{N} \mid (ba)^k = e\} = \mathrm{o}(ba)$$

שאלה 4

1. תהי G חבורה מסדר 14 ותהי H תת חבורה לא נורמלית. מה הסדר של H?
פתרון: אם $H \leq G$ אז לפי משפט לגרז'

$$|H| \mid |G|$$

אז הסדר של H חייב להיות אחד מבין $\{1, 2, 7, 14\}$. אם $|H| = 1$ אז $H = \{e\}$ שזו וודאי תת חבורה נורמלית. אם $|H| = 14$ אז $H = G$ שוב נורמלית באופן טריויאלי. אם $|H| = 7$ אז היא נורמלית בתור תת חבורה מאינדקס 2. זה משאיר לנו

$$|H| = 2$$

2. תהי G חבורה ו H תת חבורה נורמלית מאינדקס 5 (כלומר $[G : H] = 5$). ניקח $a \notin H$. הוכיחו כי $aH \neq a^3H$. כלומר אלה קוססטים שונים.
פתרון: חבורת המנה G/H היא מסדר 5 ולכן היא ציקלית. כל איבר בה פרט ליחידה הוא מסדר 5.

$$aH$$

הוא איבר בחבורת המנה שאינו היחידה כי $a \notin H$. נניח בשלילה

$$aH = a^3H$$

אז

$$a^2H = H$$

כלומר הסדר של aH הוא לכל היותר 2 בסתירה.