# מבוא לתורת החבורות תרגיל בית 9 תשע"ח.

1. מצאו את $|\mathrm{conj}(\sigma)|$ כאשר $\sigma = (2573) \in S_{14}$.

2. קבע האם הפעולות הבאות של חבורה $G$ על $\mathbb{R}^2$ היא פעולה של חבורה על קבוצה. באם כן, תארו את המסלול של $(0,1)$ ושל $(1,1)$.

   (א) $G = \mathbb{R}$ עם הפעולה $t * (x,y) = (x+t, y+2t)$.

   (ב) $G = \mathbb{Z}$ עם הפעולה $t * (x,y) = (tx, t^2x)$.

   (ג) $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ עם פעולה $A * (x,y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

3. תהי $G$ חבורה שפועלת על קבוצה $X$. נגדיר יחס על $X$ באפן הבא: $x \sim y$ אם קיים $g \in G$ כך ש $gx = y$.

   (א) הוכיחו שזהו אכן יחס שקילות. (הערה: מחלקות השקילות הן המסלולים. כלומר, מחלקת השקילות של $x$ היא $orb(x)$)

   (ב) הוכיחו שאם $x \sim y$ אז $stab(x)$ צמוד ל$stab(y)$, כלומר, קיים $g$ כך ש$stab(x) = g(stab(y))g^{-1}$.

4. תהי $G$ חבורה הפועלת על קבוצה $X$ ונגדיר

$$G_0 = \{g \in G | g * x = x \, \forall x \in X\}$$

   (א) הוכיחו ש$G_0$ היא תת חבורה של $G$

   (ב) הויכחו ש$G_0$ תת חבורה נורמלית.

(ג) נגדיר פעולה של $G/G_0$ על $X$ ע"י: $(gG_0)x = gx$. הוכיחו שהפעולה מוגדרת היטב, כלומר לא תלויה בבחירת הנציג. (אין צורך להוכיח שזאת אכן פעולה)

(ד) הוכיחו שהפעולה מהסעיף הקודם נאמנה.

5. חשבו את $stab(x)$ במקרים הבאים:

(א) $G$ פועלת על עצמה, $x$ איבר כלשהו בחבורה.

(ב) $S_4$ פועלת על פולינומים עם 4 משתנים, $x$ שווה לפולינום $x_1 + x_2$.

6. מצאו את מחלקות הצמידות בחבורה:

(א) $S_3$.

(ב) $D_4$.

7. תהי $X$ קבוצת כל הלוחות $2 \times 2$ שכל ריבוע שלהם צבוע באחד משני הצבעים שחור/לבן. שימו לב שיש $2^4 = 16$ לוחות כאלה. ניקח $G = \mathbb{Z}_4$ ונגדיר פעולה באופן הבא: לכל $a \in \mathbb{Z}_4$ הלוח המתקבל $a * x$ הוא סיבוב הלוח $x$ ב $90 \cdot a$ מעלות. מצאו את כל המסלולים (מה האיברים בכל מסלול?). כמה מסלולים יש?