מבוא לאלגברה ליניארית - תרגיל 5

תרגיל 1. ציין האם הקבוצות הבאות ת"ל או בת"ל, ובמקרה של ת"ל יש להציג את אחד הווקטורים כצירוף ליניארי של השאר.

.1
$$B_1=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\right\}$$

פתרון. אנחנו מחפשים α,β,γ לא טריוואלים (לפחות אחד שונה מ-0) כך ש-

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

כלומר זה שקול לפתור את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&7&0\\2&5&8&0\\3&6&9&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&7&0\\0&-3&-6&0\\0&-6&-12&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&7&0\\0&-3&-6&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

כלומר $\gamma=1,\beta=-2,\alpha=1$ פותר את המערכת לכן

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

מכאן

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$$

.2
$$B_2=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\8\\4\end{pmatrix}\right\}$$

פתרון. אנחנו מחפשים α,β,γ לא טריוואלים (לפחות אחד שונה מ-0) כך ש-

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}7\\8\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

כלומר זה שקול לפתור את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&7&0\\2&2&8&0\\3&6&4&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&7&0\\0&0&-6&0\\0&-6&-17&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&7&0\\0&-6&-17&0\\0&0&-6&0\end{array}\right)$$

כלומר $\gamma=0,\beta=0,\alpha=0$ הוא הפתרון היחיד של המערכת ולכן B_2היא קבוצה בתל

3. $B_3=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$

פתרון. אנחנו מחפשים α,β,γ לא טריוואלים (לפחות אחד שונה מ-0) כך ש-

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

כלומר זה שקול לפתור את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&1&0\\2&1&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&1&0\\0&-7&-1&0\end{array}\right)$$

כלומר $\gamma=7,\beta=-1,\alpha=-3$ פותר את המערכת לכן

$$-3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

מכאן

$$-3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$$

4. $B_4=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$

פתרון. אנחנו מחפשים α,β,γ לא טריוואלים (לפחות אחד שונה מ-0) כך ש-

$$\alpha\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

כלומר זה שקול לפתור את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&2&0\\0&3&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&2&0\\0&0&-5&0\end{array}\right)$$

כלומר $\gamma=0,\beta=0,\alpha=1000$ פותר את המערכת לכן

$$1000\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

מכאן

$$0\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

5. $B_5=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

פתרון. אנחנו מחפשים $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon$ לא טריוואלים (לפחות אחד שונה מ-0) כך ש-

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\epsilon\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

כלומר זה שקול לפתור את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&0\\0&1&1&1&1&0\\0&0&1&1&1&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1&0\end{array}\right)$$

המטריצה כבר מדורגת והפתרון היחיד שלה הוא $\alpha=\beta=\gamma=\delta=\epsilon=0$ B_5היא קבוצה בת"ל

תרגיל 2. הוכח

1. יהי $S=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ קבוצה בת"ל אז הקבוצה $L_1=\{w_1,w_2,\ldots,w_n\}$בת"ל כאשר $w_i=v_1+v_i$

פתרון. יהיו $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, כך ש-

$$\alpha_1w_1+\alpha_2w_2+\ldots+\alpha_nw_n=0$$

לכן

$$\alpha_1(v_1+v_1)+\alpha_2(v_1+v_2)\ldots+\alpha_n(v_1+v_n)=0$$
$$\Downarrow$$
$$(2\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3v_3\ldots+\alpha_nv_n=0$$

ידוע ש- $S=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ לכן הצ"ל חייב להיות 0 כלומר

$$\begin{cases}2\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n&=&0\\ \alpha_2&=&0\\ \alpha_3&=&0\\ \\ \alpha_n&=&0\end{cases}$$

ומכאן

$$\begin{cases}\alpha_1&=&0\\ \alpha_2&=&0\\ \alpha_3&=&0\\ \vdots&\vdots&\vdots\\ \alpha_n&=&0\end{cases}$$

כלומר בצ"ל היחידי שמאפס את $L_1=\{w_1,w_2,\ldots,w_n\}$ הוא הצ"ל הטריוואלי ולכן היא בת"ל

2. יהי $S=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ קבוצה בת"ל אז הקבוצה $L_2=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ בת"ל כאשר $u_i=v_1+v_2+\ldots+v_i$

פתרון. יהיו $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, כך ש-

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n = 0$$

לכן

$$\alpha_1 (v_1) + \alpha_2 (v_1 + v_2) \ldots + \alpha_n (v_1 + v_2 + \ldots + v_n) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) v_1 + (\alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n) v_2 + (\alpha_3 + \ldots + \alpha_n) v_3 \ldots + \alpha_n v_n = 0$$

ידוע ש- $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ לכן הצ"ל חייב להיות 0 כלומר

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n & = & 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n & = & 0 \\ \alpha_3 + \ldots + \alpha_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n & = & 0 \end{cases}$$

ומכאן

$$\begin{cases} \alpha_1 & = & 0 \\ \alpha_2 & = & 0 \\ \alpha_3 & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n & = & 0 \end{cases}$$

כלומר בצ"ל היחידי שמאפס את $L_2 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ הוא הצ"ל הטריוואלי ולכן היא בת"ל

תרגיל 3.

1. האם הווקטור $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 =$ שייך למרחב הנפרש על ידי

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

, ואם כן מצא את הצירוף הלינארי המתאים לו.

פתרון. אנחנו מחפשים α, β, γ , כך ש-

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כלומר זה שקול לפתור את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{array}\right)$$

לכן $\alpha = \frac{1}{4}, \beta = \frac{1}{4}, \gamma = \frac{1}{4}$ לכן בסה"כ

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. מהסעיף הקודם הסק את הפתרון למערכת

$$\begin{cases} x+y+2z &= 1 \\ x+2y+z &= 1 \\ 2x+y+z &= 1 \end{cases}$$

פתרון. כעת אנחנו מחפשים x,y,zכך ש-

$$x\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

זאת אותה מערכת משוואות! ולכן בפתרון שלה זהה $x=y=z=\frac{1}{4}$

תרגיל 4. (מאתגר) $S_1=\left\{\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}\in\mathbb{R}^3, S_2=\left\{\begin{pmatrix}-7\\0\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\7\\3\end{pmatrix}\right\}\in\mathbb{R}^3$ האם מתקיים?

1. $Span\left\{S_1\right\}\nsubseteq Span\left\{S_2\right\}$

פתרון.

נשים לב ש-

$$\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-7\\0\\5\end{pmatrix}+\frac{3}{7}\begin{pmatrix}0\\7\\3\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}=\frac{2}{7}\begin{pmatrix}-7\\0\\5\end{pmatrix}+\left(-\frac{1}{7}\right)\begin{pmatrix}0\\7\\3\end{pmatrix}$$

לכן

$$\begin{aligned}
Span\left\{S_1\right\} &= \\
\left\{a\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}:a,b\in\mathbb{R}\right\} &= \\
\left\{a\left(\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-7\\0\\5\end{pmatrix}+\frac{3}{7}\begin{pmatrix}0\\7\\3\end{pmatrix}\right)+b\left(\frac{2}{7}\begin{pmatrix}-7\\0\\5\end{pmatrix}+\left(-\frac{1}{7}\right)\begin{pmatrix}0\\7\\3\end{pmatrix}\right):a,b\in\mathbb{R}\right\} &= \\
\left\{\left(\frac{a}{7}+\frac{2b}{7}\right)\begin{pmatrix}-7\\0\\5\end{pmatrix}+\left(\frac{3a}{7}+\left(-\frac{b}{7}\right)\right)\begin{pmatrix}0\\7\\3\end{pmatrix}:a,b\in\mathbb{R}\right\} &= \\
Span\left\{S_2\right\}
\end{aligned}$$

כלומר כל צירוף לינארי של S_1הוא צירוף לינארי של S_2 ולכן $Span\left\{S_1\right\}\subseteq Span\left\{S_2\right\}$

2. $Span\left\{S_2\right\}\nsubseteq Span\left\{S_1\right\}$

פתרון.

נשים לב ש-

$$\begin{pmatrix}-7\\0\\5\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\7\\3\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

לכן

$$Span\left\{S_2\right\} = \left\{a\begin{pmatrix}-7\\0\\5\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\7\\3\end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{R}\right\} = \left\{a\left(1\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}\right)+b\left(2\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}\right)\middle| a,b\in\mathbb{R}\right\} = \left\{(a+2b)\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}+(3a-b)\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{R}\right\} = Span\left\{S_1\right\}$$

כלומר כל צירוף לינארי של S_2 הוא צירוף לינארי של S_1 ולכן $Span\left\{S_2\right\}\subseteq Span\left\{S_1\right\}$

3. $Span\left\{S_1\right\} = Span\left\{S_2\right\}$

פתרון.

מהסעיפים הקודמים יש הכלה דו כיוונית, לכן $Span\left\{S_1\right\} = Span\left\{S_2\right\}$

תרגיל 5. תהי

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

פורשת את $\mathbb{R}^3$, ו-

$$A=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

בת"ל, לכל a וקטור ב-A מצא וקטור $b\in B$ כך ש-$A/\left\{a\right\}\bigcup\left\{b\right\}$ יהיה בת"ל

פתרון. נעבור על כל הווקטורים לפי הסדר:

- $a=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ אנחנו מחפשים וקטור $b\in B$ כך ש-

$$b\notin Span\left\{A/\left\{a\right\}\right\}=Span\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\middle| x=y\right\}$$

לכן שני הווקטורים הראשונים $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ עושים את עבודה.

- $a=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ אנחנו מחפשים וקטור $b\in B$ כך ש-

$$b\notin Span\left\{A/\left\{a\right\}\right\}=Span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\middle| z=y\right\}$$

לכן יש שני וקטורים טובים, והם $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ ו-$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

- $a=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ אנחנו מחפשים וקטור $b\in B$ כך ש-

$$b\notin Span\left\{A/\left\{a\right\}\right\}=Span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\middle|y=0\right\}$$

לכן כל הווקטורים ב-B יעשו את העבודה.

תרגיל 6. האם הקבוצה $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$ מהווה בסיס ל-$\mathbb{R}^3$?

פתרון. נכדי שהיא תהיה בסיס היא צריכה להיות בתל ופורשת.

- פורשת: אנחנו צריכים למצוא α,β,γ כך שלכל $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ יתקיים

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

זה שקול לפתור את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&x\\2&1&1&y\\1&1&2&z\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&x\\0&-3&-1&y-2x\\0&-1&1&z-x\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&x\\0&-3&-1&y-2x\\0&0&4&3\left(z-x\right)-\left(y-2x\right)\end{array}\right)$$

לכל $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ קיימים שלושה איברים מובילים ולכן תמיד קיים פתרון למערכת מכאן, $Span\left\{B\right\}=\mathbb{R}^3$

- בתל: אם נציב $x=y=z=0$ נקבל שהפתרון היחיד הוא הפתרון הטריוואלי ולאן Bבת"ל.

Bמקיימת את שני התכונות של בסיס ולכן היא בסיס ל-$\mathbb{R}^3$.

תרגיל 7. האם הקבוצה $B=\left\{\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\7\\3\end{pmatrix}\right\}$ מהווה בסיס ל-$\mathbb{R}^3$?

פתרון. נכדי שהיא תהיה בסיס היא צריכה להיות בתל ופורשת/

- פורשת: אנחנו צריכים למצוא α,β,γ כך שלכל $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ יתקיים

$$\alpha\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

זה שקול לפתור את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 0 & x \\ 3 & -1 & 7 & y \\ 2 & 1 & 3 & z \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 0 & x \\ 0 & -7 & 7 & y+3x \\ 0 & -3 & 3 & z+2x \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 0 & x \\ 0 & -7 & 7 & y+3x \\ 0 & 0 & 0 & 7(z+2x)-3(y+3x) \end{array}\right)$$

לכל $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ המקיימים $7z-3y+5x\neq 0$ נקבל שלא קיים פתרון לכן $Span\{B\}\neq$ $\mathbb{R}^3$ למשל $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\notin Span\{B\}$, אבל $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$

בהצלחה!!