תרגילים פתורים

20 ביוני 2016

1. הוכח/הפרך: תהא $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $0 \neq \alpha \in \mathbb{F}$ אזי 4 המרחביים היסודיים של $A, \alpha A$ שווים.

הוכחה: (נוכיח עבור מרחב האפס, עבור שאר המרחבים ההוכחה דומה)
צ"ל $N(A) = N(\alpha A)$.
($\supseteq$) יהא $x \in N(\alpha A)$. $\Leftarrow$ $\alpha Ax = 0$ נכפול ב α^{-1} ונקבל $Ax = 0$ $\Leftarrow$$x \in N(A)$.
($\subseteq$)יהא $x \in N(A)$ $\Leftarrow$ $Ax = 0$ $\Leftarrow$ $\alpha Ax = 0$ $\Leftarrow$ $x \in N(\alpha A)$ $\blacksquare$.

2. הוכח הפרך: תהא $B, A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ כך ש־4 המרחבים היסודיים שווים אזי $B = \alpha A$.

הפרכה: ניקח $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
אזי קל לראות ש $C(A) = C(B) = R(A) = R(B) = \mathbb{R}^2$.
בנוסף לפי המשפט על המימדים נקבל ששאר המרחביים שווים ל $\{0\}$.
לכן 4 המרחביים היסודיים שווים אבל Bאינה כפולה של A. $\blacksquare$

3. תהא $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, B \in \mathbb{F}^{n\times p}$. הוכח שאם עמודות AB בת"ל אז גם עמודות B בת"ל

הוכחה: מהנתון $p = rank(AB) \leq rank\,(B) \leq p$ ולכן $rank(AB) = p$ ומכאן ש $rank\,(B) = p$ כלומר עמודות B בת"ל (ע"פ משפט שקילות שהוכחנו בכיתה)

4. תהא $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ? \\ 1 & ? & 1 \\ ? & 1 & 1 \end{pmatrix}$, נתון כי קיימים שני פתרונות בת"ל למערכת $Ax = 0$
מצאו את האיברים החסרים במוריצה.

פתרון:
נתון כי $N\,(A) \geq 2$ מצד שני רואים כי $rank\,(A) \geq 1$, לפי משפט הדרגה $rankA + N\,(A) = 3$ ולכן $N\,(A) = 2$ ו־$rankA = 1$. לכן כל העמודות ב־A ת"ל בעמודה הראשונה ולכן

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. יהיו $u_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$
וקטורים ב-$\mathbb{R}^4$ מצאו את

$$[span\left(\{u_1, u_2, u_3\}\right)]^{\perp}$$

פתרון:

לפי מה שלמדנו בכיתה המשלים האורטוגונלי של המרחב הנ"ל מתאים למרחב האפס של המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \\ -3 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ לאחר הדרוג נקבל

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \\ -3 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן מרחב האפס הוא: $\left\{\begin{pmatrix} t & -2t & t & 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\right\}$ ולכן המרחב האורטוגונלי הוא $span\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}\right)$ (אפשר לבדוק אורטוגונליות לראות שצדקנו...)

6. יהי V מרחב לינארי U תת מרחב של V הוכיחו כי:

א. הוכיחו $V^{\perp} = \{0\}$, $\{0\}^{\perp} = V$.

ב. $\left(U^{\perp}\right)^{\perp} = U$.

פתרון:

א. יהי $v \in V$ אזי $v \notin V^{\perp}$ אחרת $0 \neq v$ ולפי תכונות מכפלה פנימית $\langle v, v\rangle = 0$ לכן הוקטור היחיד במרחב שיכול להיות ב-$V^{\perp}$ הוא 0 ולכן $V^{\perp} = \{0\}$.
$\{0\}^{\perp}$ מכיל את כל הוקטורים האורטוגונלים לאפס = כל הוקטורים המקיימים $\langle v, 0\rangle = 0$ לפי מה שראינו בכיתה כל וקטור ב-Vמקיים את התכונה הנ"ל לכן מתקיים $V = \{0\}$.

ב. $u \in U$ $u' \in U^{\perp}$ אזי $\langle u, u'\rangle = 0$ ולכן $u \in \left(U^{\perp}\right)^{\perp}$. לכן $U \subseteq \left(U^{\perp}\right)^{\perp}$
$u \in \left(U^{\perp}\right)^{\perp}$ אזי לכל $u' \in U^{\perp}$ מתקיים $\langle u, u'\rangle = 0$ ולכן $u \in U$. לכן $\left(U^{\perp}\right)^{\perp} \subseteq U$.

7. תהי $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ קבוצה אורתוגונלית של וקטורים. הוכיחו כי S בת"ל.

פתרון:

נניח כי S ת"ל אזי קיים $0 \leq i \leq n$ כך ש-$\alpha_i \neq 0$ ומתקיים $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_n = 0$, לכן מתקיים

$$\begin{aligned}
\left\langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_n, v_i \right\rangle &= \langle \alpha_1 v_1, v_i\rangle + \langle \alpha_2 v_2, v_i\rangle + \ldots \langle \alpha_i v_i, v_i\rangle + \ldots + \langle \alpha_n v_n, v_i\rangle \\
&= \alpha_1 \langle v_1, v_i\rangle + \alpha_2 \langle v_2, v_i\rangle + \ldots + \alpha_i \langle v_i, v_i\rangle + \ldots + \alpha_n \langle v_n, v_i\rangle = \alpha_i \langle v_i, v_i\rangle \\
&= \langle 0, v_i\rangle = 0
\end{aligned}$$

ולכן לפי תכונות מכפלה פנימית $0 = \alpha_i \langle v_i, v_i \rangle = 0 \Rightarrow v_i = 0$ סתירה.