תרגול 11

1. הגדרה: מרחב האוסדורף X נקרא קומפקטי מקומית אם לכל נקודה $x \in X$ קיימת קבוצה קומפקטית A כך ש$x \in int(A)$.

2. תרגיל (קומפקטיפיקציית הנקודה): יהא X מרחב T_2 שאינו קומפקטי. נגדיר $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ כאשר ∞ איבר שלא ב X. נגדיר טופלוגיה τ על $\hat{X}$ ע"י שנגדיר את הקבוצות הסגורות בו: הקבוצות הסגורות ב $\hat{X}$הן תתי הקבוצות הקומפקטיות של X והקבוצות מהצורה $S \cup \{\infty\}$ עבור S סגורה ב X.

   (א) הוכיחו כי אכן τ טופולוגיה (היעזרו בעובדה כי כל קבוצה סגורה F ב $\hat{X}$ מקיימת כי $F \backslash \{\infty\}$ קבוצה סגורה ב X).

   (ב) הוכיחו כי X הוא תת מרחב של $\hat{X}$.

   (ג) הוכיחו כי $\hat{X}$ הוא קומפקטי.

   (ד) הוכיחו כי X צפופה ב $\hat{X}$.

   (ה) הוכיחו כי X קומפקטי מקומי אמ"מ $\hat{X}$ הוא T_2

3. שאלת המשך:

   (א) הוכיחו כי $\mathbb{Q}$ אינו קומפקטי מקומי והסיקו כי קומפקטיפיקציית הנקודה $\hat{\mathbb{Q}}$ אינה T_2.

   (ב) הוכיחו כי ב $\hat{\mathbb{Q}}$ כל קבוצה היא סגורה אמ"מ היא קומפקטית.

4. תרגיל: מצאו דוגמה למ"ט X שאינו האוסדורף בו כל גבול הוא יחיד.
פתרון: ניקח את $\mathbb{R}$ עם הטופלוגיה הקו-מנייתית ($\{O \mid |O^c| \leq \aleph_0\} \cup \{\emptyset\}$) ונראה שזה מ"ט המקיים את הדרישות שבשאלה.

5. הגדרה: יהי X מ"ט ו$x \in X$. יהי $\{O_i\}$ אוסף של קבוצות סביבות של X. נאמר ש$\{O_i\}$ הוא בסיס מקומי של x, אם כל סביבה U של x מכילה איזשהו O_i.

6. הגדרה: נאמר ש(X, τ) הוא בעל תכונת מניה ראשונה, או B_1, אם לכל נקודה יש בסיס מקומי בן מניה.

7. תרגיל: הוכיחו שאם X מ״ט שבו כל גבול יחיד ובנוסף הוא B_1 אזי X הוא האוסדורף.

8. תרגיל: הוכיחו כי כל פונקציה רציפה והפיכה מ$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ היא הומיאומורפיזם.