תרגול 8

פונק' פתוחות וסגורות.

1. הגדרה: פונקציה $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ תקרא פתוחה אם תמונה של פתוחה היא פתוחה. והיא תקרא סגורה אם תמונה של סגורה היא סגורה.

   (א) הערה: רציפות, פתיחות וסגירות של פונקציה אינן שקולים.

   (ב) דוגמא: $f:(\mathbb{R},\tau_S)\to\left(\mathbb{R},\tau_{|*|}\right)$ המוגדרת $f(x)=\lfloor x\rfloor$. כן רציפה: יהא קטע (a,b) בטופולוגיה אזי

   $$f^{-1}\left(a,b\right)\in\left[\lceil a\rceil,\lfloor b\rfloor+1\right)$$

   למשל $f^{-1}\left(2.3,5.1\right)=\left[3,6\right)$. כן סגורה: כי לכל תת קבוצה A מתקיים כי $f(A)\subseteq\mathbb{Z}$ שהיא סגורה ב $\mathbb{R}$ עם האוקלידית.
   לא פתוחה: $f[1,2)=\{1\}$ שאינו פתוח.

   (ג) דוגמא: $f:\left(\left(0,1\right),\tau_{|*|}\right)\to\left(\mathbb{R},\tau_{|*|}\right)$ המוגדרת $f(x)=x$ ההכלה. היא פתוחה כי $f(O)=O=O=O'\cap(0,1)$ שפתוח ב $\mathbb{R}$. לא סגורה: כי $f((0,1/2])=(0,1/2]$ שאינה סגורה.

   (ד) הערה: אם f פתוחה/סגורה אזי היא תהיה פתוחה/סגורה גם שמצמצמים את הטווח לתמונה של f. ההיפך אינו נכון.

2. הגדרה: פונקציה $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ תקרא הומיאומורפיזים אם f הפיכה ורציפה וההופכית גם רציפה.
   אם יש הומיאומורפיזם $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ אז נגיד שהמרחבים הומיאומורפיים.

   (א) למשל $f:(\mathbb{R},\mathrm{disc})\to\left(\mathbb{R},\tau_{|*|}\right)$ היא הפיכה ורציפה אבל אינה הומיאומורפיזם כי ההופכית אינה רציפה.

   (ב) תרגיל: $\left(\mathbb{R},\tau_{|*|}\right)$ הומיאומורפי לישר $\{(x,y):\ y=mx+n\}$.
   הוכחה: $f(x)=(x,mx+n)$ רציפה כי היא רציפה בכל קורדינאטה וצמצום הטווח לא משנה רציפות. ההופכית היא ההטלה שרציפה וסיימנו. קל לראות חד-חד ערכיות ועל.

   (ג) הערה: f הפיכה רציפה ופתוחה (או סגורה) אמ"מ היא הומיאומורפיזם.

   (ד) הערה: אם X הומאומורפי' ל Y עם פונקציה f אזי $X\backslash A$ הומי' ל $Y\backslash f[A]$ לכל $A\subseteq X$.

3. הערה: מרחבים הומיאומורפיים הם בגדול בעלי אותם תכונות טופולוגיות למשל: קשירות.

(א) תרגיל: הוכיחו כי $(0,1)$ אינו הומ' ל $[0,1]$.

הוכחה: אם נוריד את 0 נקבל $(0,1]$ שהוא קשיר אבל כאשר נוריד מ $(0,1)$ נקודה הוא כבר לא יהיה קשיר.

באופן פורמלי: נניח בשלילה שקיים הומיאומורפיזם $f:[0,1]\to(0,1)$. אז הפונקציה המצומצמת $f:(0,1]\to(0,1)\setminus\{f(0)\}$ גם היא הומיאומורפיזם. אבל $(0,1]$ קשיר, ואילו $(0,1)\setminus\{f(0)\}$ אינו קשיר, כי כל נקודה שנוריד מהקטע $(0,1)$ תהפוך אותו ללא קשיר.

4. תרגיל: הוכיחו כי ב$\mathbb{R}^2$ מעגל אינו הומיאומורפי לשני מעגלים שנחתכים.

פתרון: במעגל- כל שתי נקודות שנוריד נקבל מרחב לא קשיר. ואילו בשני מעגלים נחתכים, אם נוריד נקודה אחת מכל מעגל (לא את נקודות החיתוך!), המרחב עדיין יהיה קשיר.

מרחבי מכפלה סופיות

1. הגדרה: יהיו (X_i,τ_i) מספר סופי של מרחבים טופולוגיים. נגדיר $X=\prod_i X_i$ ונגדיר טופולוגיה τ עליו כך: הבסיס של הטופולוגיה יהיה $\{\prod U_i : U_i\in\tau_i\}$ (כלומר: מכפלות של קבוצות פתוחות).

(א) דוגמא: ב $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ עם טופולוגית המכפלה: הקבוצה $(0,1)\times(0,1)\cup(1,2)\times(1,2)$ פתוחה, אבל לא שייכת לבסיס שתיארנו.

(ב) תרגיל: מכפלה סופית של מרחבים דיסקרטיים (עם טופולוגיית המכפלה, כמובן) היא מרחב דיסקרטי.

הוכחה: כל נקודון $\{(a_1,\dots a_n)\}$ הוא פתוח כי שווה ל $\prod_i\{a_i\}$.

2. תרגיל: האם מכפלה של מרחבים קו-סופיים יוצרת את הטופולוגיה הקו- סופית?

פתרון: לא. למשל, אם נכפיל את המרחב $(\mathbb{N},\tau_{cof})$ עם עצמו. נסתכל על $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ עם טופולוגית המכפלה המתקבלת. $\mathbb{N}\setminus\{1\}\times\mathbb{N}\setminus\{1\}$ פתוח לפי הגדרה אבל המשלים שווה ל $(\{1\}\times\mathbb{N})\cup(\mathbb{N}\times\{1\})$ שאינו סופי.

3. תרגיל: הוכיחו כי במרחב מכפלה, מכפלה סופית של קבוצות סגורות היא קבוצה סגורה.

פתרון: יהיו $S_i\subseteq X_i$ קבוצות סגורות. רוצים להוכיח כי $S_1\times\ldots\times S_n$ קבוצה סגורה. זה נובע מכך שהמשלים הוא איחוד של פתוחות $\cup_j U_j$ כאשר $U_j=\prod_{i\neq j}X_i\times S_j^c$. (לצורך ההבנה, נדגים על שתי קבוצות: $(S_1\times S_2)^c=(S_1^c\times X_2)\cup(X_1\times S_2^c)$).

4. תרגיל: יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים. $A\subseteq X, B\subseteq Y$. הוכיחו כי בטופולוגיית המכפלה על $X\times Y$ מתקיים: $cl(A\times B)=cl(A)\times cl(B)$

פתרון: $A\times B\subseteq cl(A)\times cl(B)$, וכן $cl(A)\times cl(B)$ היא קבוצה סגורה כמכפלה של סגורות (לפי התרגיל הקודם), ולכן $cl(A\times B)\subseteq cl(A)\times cl(B)$.

בכיוון השני: נשתמש בקריטריון השקול. תהא $(a,b)\in cl(A)\times cl(B)$, כלומר $a\in cl(A), b\in cl(B)$. נוכיח כי $(a,b)\in cl(A\times B)$ תהא O סביבה של (a,b). צריך להוכיח ש$O\cap(A\times B)\neq\emptyset$. ובכן, מהגדרת הטופולוגיה, O היא איחוד של קבוצות פתוחות בסיסיות, כלומר, מכפלות של קבוות פתוחות. כלומר, קיימות U,V פתוחות בX ובY בהתאמה, כך ש$(a,b)\in U\times V\subseteq O$. בפרט, $a\in U, b\in V$. מכיוון ש$a\in cl(A), b\in cl(B)$, נקבל ש$V\cap B\neq\emptyset$ $U\cap A\neq\emptyset$. לכן $(A\times B)\cap(U\times V)\neq\emptyset$. נובע מכאן ש: $O\cap(A\times B)\neq\emptyset$.

5. תרגיל: יהא X מ"ט נגדיר את האלכסון $\Delta=\{(x,x):x\in X\}\subseteq X\times X$. הוכיחו כי Δ סגור אמ"מ X הוא T_2

פתרון: $(\Leftarrow)$ נתון כי Δ סגור. יהא $x_1 \neq x_2$ אזי $(x_1,x_2)\in\Delta^c$ שפתוחה ולכן קיימת קבוצה פתוחה בסיסית $(x_1,x_2)\in U_1\times U_2\subseteq\Delta^c$. בפרט $U_1\cap U_2=\emptyset$ (אחרת החיתוך עם האלכסון היה לא ריק) ו $x_i\in U_i$. זה בדיוק ההגדרה של הפרדה סביבתית.
$(\Rightarrow)$ נתון X הוא T_2. נוכיח כי המשלים של האלכסון פתוח. תהא $(x_1,x_2)\in\Delta^c$ (כלומר $x_1\neq x_2$) אזי קיימות סביבות U_1,U_2 פתוחות וזרות כך ש $x_1\in U_1, x_2\in U_2$. מכיוון שהן זרות נקבל שאם $(x,y)\in U_1\times U_2$, אז $x\neq y$. אחרת, $x=y$ ו $x\in U_1, y\in U_2$ וזה סתירה. כלומר, כל נקודה ב$U_1\times U_2$ היא לא באלכסון. לכן $(x_1,x_2)\in U_1\times U_2\subseteq\Delta^c$.
מסקנה: Δ^c פתוח.

6. תרגיל: הוכיחו כי Δהומיאומורפי ל X.
פתרון: נגדיר $f:X\to\Delta$ ע"י $f(x)=(x,x)$ אזי f הפיכה. בנוסף לכל $(U_1\times U_2)\cap\Delta$ מתקיים כי $f^{-1}(U_1\times U_2)\cap\Delta=U_1\cap U_2$ ולכן f רציפה. בנוסף, לכל U פתוחה מתקיים כי $f(U)=(U\times U)\cap\Delta$ שפתוחה ב Δ.

7. תרגיל: האם מכפלה סופית של מרחבי האוסדורף היא מרחב האוסדורף??
פתרון: כן. יהיו $X_1,...,X_n$ מרחבי האוסדורף. יהיו $(x_1,...x_n)\neq(y_1,...,y_n)\in X_1\times\cdots\times X_n$. כלומר, קיים רכיב i כך ש$x_i\neq y_i$. מכיוון שX_i מרחב האוסדורף, קיימות סביבות פתוחות זרות $x_i\in U_i, y_i\in V_i$. אזי $(x_1,...,x_n)\in X_1\times\cdots\times U_i\times\cdots X_n$ ו$(y_1,...,y_n)\in X_1\times\cdots\times V_i\times\cdots\times X_n$, אילו קבוצות פתוחות וזרות (כי הן זרות באחד הרכיבים).

מרחבי מכפלה אינסופיות

1. הגדרה: יהיו (X_i,τ_i) אוסף כלשהוא של מרחבים טופולוגיים. נגדיר $X=\prod_i X_i$ ונגדיר את טופולוגית המכפלה τ_π עליו כך: בסיס של הטופולוגיה יהיה $B_\pi=\{\prod U_i : U_i\in\tau_i\}$ כך שפרט למספר סופי של אינדקסים $U_i=X_i$. (במילים: במספר סופי של אינדקסים בוחרים קבוצה פתוחה, ומכפילים עם כל שאר המרחבים).

   (א) הערה: בטופולוגיה המכפלה מתקיים כי פונקציות ההטלה על רכיב מסויים: P_i $X\to X_i$ רציפות. כי $P_i^{-1}(U)=\prod_{i\neq j}X_i\times U$

2. תרגיל: יהיו (X_i,τ_i) אוסף כל שהוא של מרחבים טופולוגיים. ותהא τ' טופלוגיה על $X=\prod_i X_i$ כך שכל P_i רציפות. הוכיחו כי $\tau_\pi\subseteq\tau'$.
פתרון: לכל X_i ולכן $U\subseteq X_i$ מתקיים כי$P_i^{-1}(U)=\prod_{i\neq j}X_i\times U$. מכייון שההטלה רציפה, הקבוצה $\prod_{i\neq j}X_i\times U\in\tau'$. כעת, מכיוון ש$\tau'$ טופולוגיה, היא סגורה לחיתוכים סופיים. נשים לב כי כל קבוצה ב B_π היא חיתוך סופי של קבוצות מהצורה הזאת. לכן $B_\pi\subseteq\tau'$.

3. תרגיל: תהא $f:Y\to\prod X_i$ פונקציה. אזי f רציפה אמ"מ $P_i\circ f$ רציפה לכל i.
פתרון: $(\Leftarrow)$ ברור. הרכבה של רציפות היא רציפה.
$(\Rightarrow)$ תהי O קבוצה פתוחה בסיסית. O מהצורה של מכפלה של קבוצות פתוחות במס' סופי של רכיבים, עם כל שאר המרחבים. כלומר:

$$O=U_{i_i}\times\cdots\times U_{i_n}\times\prod_{j\neq i_1,\ldots,i_n}X_j$$

אנחנו צריכים להוכיח ש$f^{-1}(O)$ פתוחה. נשים לב שאיבר נשלח לO אמ"ם ברכיבים $i_1, ..., i_n$ הוא נשלח ל $U_{i_1}, ..., U_{i_n}$ בהתאמה. כלומר,

$$f^{-1}(O) = \bigcap_{j=1,...,n} (P_{i_j} \circ f)^{-1}(O_{i_j})$$

קבוצה פתוחה כחיתוך סופי של פתוחות.

4. תרגיל: מכפלה כלשהי של קבוצות סגורות היא סגורה. כלומר, יהיו $\{X_i\}$ מרחבים טופולוגיים ו$C_i \subseteq X_i$ קבוצות סגורות. הוכיחו ש$\prod C_i \subseteq \prod X_i$ סגור בטופולוגיית המכפלה.
הוכחה: $(\prod C_i)^c = \bigcup_j (C_j^c \times \prod_{i \neq j} X_i)$ איחוד של קבוצות פתוחות.

5. תרגיל: יהיו X_i מרחבים דיסקרטים לא ריקים. אזי $X = \prod X_i$ דיסקרטי אמ"מ $|X_i| = 1$ פרט למספר סופי של מקומות.
פתרון: $(\Rightarrow)$ מתקיים כי X הומי' למכפלה סופית של מרחבים דיסקרטים שהוא דיסקרטים.
$(\Leftarrow)$ נניח שאבאינסוף מהמרחבים יש יותר מאיבר אחד, והוכיח שהמכפלה לא דיסקרטית. נבחר $x_i \in X_i$. טענה $\{(x_i)\}$ אינו פתוח. הוכחה: אף קבוצה פתוחה בסיסית אינה מוכלת בו (כי פרט למספר סופי של אינדקסים צריך לבחור את כל המרחב X_i, ויש איהסוף מרחבים כאלה עם יותר מאיבר אחד).

6. תרגיל: מכפלה כלשהיא של מרחבים T_2 היא T_2.
פתרון: יהיו X_i מ"ט T_2. יהיו $(x_i) \neq (y_i) \in \prod X_i$ אזי קיים i כך ש $x_i \neq y_i$ ולכן קיימות סבובות זרות U, V ב X_i כך ש $x_i \in U, y_i \in V$ ואז $\prod_{j \neq i} X_j \times U, \prod_{j \neq i} X_j \times V$ קבוצות פתוחות זרות ב X שמפרידות את הנקודות.

7. תרגיל: אם אחד מהמרחבים X_i אינו קשיר אזי המכפלה $X = \prod X_i$ אינה קשירה
פתרון: אם $X_i = V_1 \uplus V_2$ אזי $X = \left(\prod_{j \neq i} X_j \times V_1\right) \uplus \left(\prod_{j \neq i} X_j \times V_2\right)$, קבוצות פתוחות וזרות.

8. הגדרה: על מכפלה אינסופית של מרחבים טופולוגיים ניתן להגדיר טופולוגיה נוספת שנקרא לה: $box - top$ (טופולוגיית הקופסאות). מוגדרת ע"י הבסיס $\{\prod U_i : U_i \in \tau_i\}$. 0כלומר, בכל רכיב בוחרים קבוצה פתוחה).

9. תרגיל: הראו כי ביחס ל $box - top$ ייתכן כי פונקציה תהא רציפה בכל רכיב למרות שאינה רציפה.
פתרון: $f : \mathbb{R} \to \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$ המוגדרת $f(x) = (x)_{i \in \mathbb{N}}$ רציפה בכל רכיב כי זוהי פונקציה הזהות אבל אינה רציפה כי $f^{-1} \prod_{i \in \mathbb{N}} (-i, i) = \{0\}$ שאינו פתוח ב $\mathbb{R}$.

קשירות במכפלה

1. משפט: אם X_1, X_2 קשירים אזי $X_1 \times X_2$ קשיר (ולכן מכפלה סופית של קשירים היא קשירה)
הוכחה: נבחר 2 נקודות $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$במכפלה ונראה שיש קבוצה קשירה שמכילה את שניהם. $\{a_1\} \times X_2$ הומי' ל X_2 ולכן קשיר. באותו אופן $X_1 \times \{b_2\}$ קשיר. והחיתוך שלהם לא ריק כי (a_1, b_2) נמצא בחיתוך. לכן האיחוד שלהם קשיר והאיחוד מכיל את שתי הנקודות. כלומר, כל 2 נקודות נמצאות באותו רכיב קשירות, ולכן המרחב קשיר.

2. משפט: (משפט אלומות) יהא X מ״ט יהיו $\{A_i\}$ אוסף תמ״ט קשירים שנחתכים בזוגות אזי $\cup A_i$ קשיר.
הוכחה: הוכחתם בהרצאה.

3. תרגיל: אם $\{X_i\}$ קשירים אזי $\prod X_i$ קשיר.
הוכחה: נראה שיש לה תת קבוצה צפופה קשירה. (הוכחנו באחד התרגולים, שאם למרחב יש תת קבוצה צפופה קשירה, אז המרחב קשיר). נבחר $a_i \in X_i$ לכל i. לכל תת קבוצה סופית של אינדקסים J נגדיר $A_J = \prod_{j\in J} X_j \times \prod_{i\notin J} \{a_i\}$ אלו קבוצות קשירות כי הן הומיאומורפיות למכפלה סופית, ובתרגיל הקודם הוכחנו שמכפלה סופית של מרחבים קשירים היא מרחב קשיר. קבוצות אלו נחתכות בזוגות כי הוקטור (a_i) שייך לכולם. לכן $\cup_J A_j$ קשיר. נראה כי זוהי קבוצה צפופה. אכן תהא קבוצה בסיסית $O = \prod_{j\in J} U_j \times \prod_{i\notin J} X_i$ (כאשר J קבוצה סופית, U_j פתוח ב X_j) אזי $\prod_{j\in J} U_j \times \prod_{i\notin J} \{a_i\} \subseteq O \cap A_j$ לא ריק.