

## אוסף שאלות חזרה לבוחן - אלגברה לינארית לביולוגיה חישובית

6 בדצמבר 2017

1. פתרו את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{aligned}a^2x_1 + 5x_2 + x_3 &= b \\ax_1 + (a + 3)x_2 + 3x_3 &= 0 \\x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0\end{aligned}$$

(עבור אילו ערכי  $a, b$  יש פתרון יחיד? מצאו אותו. עבור אילו ערכי  $a, b$  אין פתרון? עבור אילו ערכי  $a, b$  יש אינסוף פתרונות? במקרה זה מצאו פתרון כללי)

2. תהי מערכת משוואות  $Ax = b$  שיש לה פתרון יחיד. האם בדירוג של  $A$  יכולה להיות שורת אפסים? (רמז: כן. מצאו דוגמא כזו)

3. תהי מערכת משוואות  $Ax = 0$  כאשר  $A$  מטריצה ריבועית ולא הפיכה. הוכיחו כי למערכת יש אינסוף פתרונות.

4. תהי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

אילו מהטענות הבאות נכונה?

(א)  $A^2 = 0$

(ב)  $A^3 = 0$  אבל  $A^2 \neq 0$

(ג)  $A^4 = 0$  אבל  $A^3 \neq 0$

(ד) אף תשובה אחרת אינה נכונה.

5. דרך אגב, מדוע כל מטריצה שתקיים ש  $A^k = 0$  עבור מספר  $k$  כלשהוא היא בהכרח לא הפיכה?

6. נתונה מטריצה  $A$ . הצלחנו להגיע מ  $A$  ל  $I$  ע"י ביצוע פעולות השורה הבאות (בסדר הזה):

$$R_2 = R_2 - 2R_1 \bullet$$

$$\begin{aligned}
 R_1 &\leftrightarrow R_2 \bullet \\
 R_3 &= 2R_3 \bullet \\
 R_3 &= R_3 - 2R_2 \bullet
 \end{aligned}$$

איזה מהטענות הבאות נכונה?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{א})$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{ב})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} A = I \quad (\text{ג})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = I \quad (\text{ד})$$

7. נתונה מטריצה ריבועית  $A$  מגודל  $4 \times 4$ . ביצענו על  $A$  את פעולות השורה הבאות:

$$\begin{aligned}
 R_2 &\leftrightarrow R_3 \bullet \\
 R_4 &= R_4 + 3R_1 \bullet \\
 R_2 &= 2R_2 \bullet
 \end{aligned}$$

לאחר ביצוע הפעולות הנ"ל קיבלנו מטריצה חדשה  $B$ .

(א) מצאו מטריצה  $C$  המקיימת  $CB = A$ .

(ב) מה הקשר בין הדטרמיננטה של  $A$  לדטרמיננטה של  $B$ ? כלומר, אם  $|A| = x|B|$ , מהו  $x$ ?

8. תנו דוגמא לשתי מטריצות ריבועיות  $A, B$  הפיכות כך ש  $A + B$  היא מטריצה לא הפיכה ושונה מ  $0$ .

9. תנו דוגמא לשתי מטריצות ריבועיות  $A, B$  שעבורן  $|A + B| \neq |A| + |B|$ .

10. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 15 & 3 \end{pmatrix}$$

רמז: יוצא  $-504$ .

11. עבור אילו ערכי  $a$  המטריצה

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & a & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

הפיכה? (רמז: מומלץ להשתמש בדטרמיננטה)