מידע לגבי המבחן:
המבחן שעתיים.
המבנה יהיה בדומה לזה של אסף, כלומר, אפשר לצבור כ130 נקודות, אבל הבדיקה תיעצר אם תגיעו.
יהיה באזור ה6 שאלות.
ניתן להתאמן ממבחנים של אסף, מבחינת הסגנון של השאלות.
אבל- לא יהיו הוכחות מההרצאה. יתכנו וריאציות קלות על משפטים מההרצאה.
בלי חומר פתוח.

תזכורת: בשיעור הקודם הגדרנו אידיאל על קבוצה.

הגדרה: תהי A קבוצה. $I \subseteq P(A)$ נקרא אידיאל אם הוא סגור כלפי מטה, וסגור לאיחודים סופיים.
הוא נקרא אידיאל "נאות" אם הוא מוכל ממש ב$P(A)$, שקול לכך ש$A \notin I$.

הגדרה: אידיאל נקרא "סיגמא-אדיטיבי" אם הוא סגור לאיחודים בני מניה.

דוגמא: ב$A = \mathbb{R}$ נגדיר את I להיות אוסף הקבוצות ממידה 0. הוכחתם בתורת המידה שקבוצה שמוכלת בקבוצה ממידה 0 היא ממידה 0. איחוד בן מניה של קבוצות ממידה 0 הוא קבוצה ממידה 0. זה גם אידיאל נאות, כי יש קבוצות לא ממידה 0.

דוגמא נוספת: $A = \omega_1 = \aleph_1$, נגדיר את I להיות אוסף תתי הקבוצות הבנות מניה.
ידוע שתת קבוצה של קבוצה בת מניה היא בת מניה, ואיחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה הוא בן מניה. ω_1 בעצמו אינו בן מניה.
מעכשיו הולכים להתמקד בω_1.

הגדרה: פונקציה $f : \omega_1 \to \omega_1$ נקראת "נורמלית" אם:
1. f שומרת סדר.
2. f רציפה. כלומר, לכל $\beta \in \omega_1$ סודר גבולי, $f(\beta) = \sup_{\alpha<\beta} f(\alpha)$.

לדוגמא: יהי $\beta < \omega_1$. נגדיר

$$f_\beta(\alpha) = \beta + \alpha$$

הוכחתם בש"ב שזאת פונקציה נורמלית.

תרגיל: תהי $f : \omega_1 \to \omega_1$ פונקציה נורמלית. אזי לכל $\alpha \in \omega_1$ יש $\alpha < \beta \in \omega_1$ שהיא נקודת שבת, כלומר $f(\beta) = \beta$.

הוכחה: נבנה סדרה. $\alpha_0 = \alpha+1$. אם $\alpha+1$ הוא נקודת שבת, סיימנו. אחרת, $f(\alpha_0) > \alpha_0$. נמשיך ככה.
$\alpha_{n+1} = f(\alpha_n)$. אם באיזשהו שלב הגענו לנקודת שבת, אנחנו עוצרים. אחרת, יש לנו סדרה עולה, אז הגבול שלה

$$\beta = \sup \alpha_n$$

הוא סודר גבולי. ולכן

$$f(\beta) = \sup f(\alpha_n) = \sup \alpha_{n+1} = \beta$$

סימון: תהי f פונקציה נורמלית. נסמן בNS_f את אוסף הנקודות שהם לא נקודות שבת של f. non-stationary.
אם α היא לא נקודת שבת של f, אז $f(\alpha) > \alpha$.

מסמנים ב$NS \subseteq P(\omega_1)$ את קבוצה כל הקבוצות שמוכלות בקבוצה מהצורה NS_f עבור איזשהי פונקציה נורמלית f.

$$NS = \{A \subseteq NS_f : f\text{normal}\}$$

הקבוצות בNS הן קבוצות שיש פונקציה נורמלית שמזיזה את כל הנקודות בהן.

טענה: NS היא אידיאל נאות, שמרחיב את האידיאל של קבוצות בנות מניה.

הוכחה:

נאות: $\omega_1 \notin NS$ כי אין פונקציה נורמלית שמזיזה את כל האיברים בω_1, כי ראינו שלכל פונקציה נורמלית יש נקודת שבת.

מכיל את כל הקבוצות הבנות מניה:

תהי $A \subseteq \omega_1$ בת מניה. בגלל שω_1 הוא מונה סדיר (כי זה $\aleph$ של עוקב) אז הקופנליות שלו זה הוא בעצמו, ולכן כל תת קבוצה בת מניה לא יכולה להיות קופינלית, כלומר, היא חסומה. כלומר יש $\beta \in \omega_1$ כך שלכל $\alpha \in A$ $\alpha < \beta$. אז f_β מהדוגמא היא פונקציה נורמלית. לכל α נקבל

$$f(\alpha) = \beta + \alpha \geq \beta + 0 = \beta$$

אז אם $\alpha < \beta$ נקבל ש$f(\alpha) \neq \alpha$.

סגירות כלפי מטה: מהגדרה.

איחודים סופיים: מספיק להוכיח סגירות לאיחוד של שניים.

יהיו $A, B \in NS$. נניח שf נורמלית שמזיזה את כל איברי A וg נורמלית שמזיזה את כל איברי B.

צריך למצוא פונקציה נורמלית שמזיזה את כל איברי $A \cup B$.

נגדיר $h = \max\{f, g\}$.

$h(x) = x$. ידוע ש$f(x), g(x) \geq x$ ולכן אם המקסימום שווה לx, אז שניהם שווים לx.

ולכן אם f או g מזיזות את x, אז גם h תעשה את זה.

ולכן h מזיזה את כל איברי $A \cup B$.

למה h נורמלית:

$$\alpha < \beta$$

$$h(\alpha) = \max\{f(\alpha), g(\alpha)\}, h(\beta) = \max\{f(\beta), g(\beta)\}$$

ברור.

$$h(\beta) = \max\{f(\beta), g(\beta)\} = \max\{\sup_{\alpha<\beta} f(\alpha), \sup_{\alpha<\beta} g(\alpha)\}$$

$$= \sup\{\sup_{\alpha<\beta} f(\alpha), \sup_{\alpha<\beta} g(\alpha)\} = \bigcup\{\bigcup_{\alpha<\beta} f(\alpha), \bigcup_{\alpha<\beta} g(\alpha)\} =$$

$$\bigcup_{\alpha<\beta} (f(\alpha) \cup g(\alpha)) = \bigcup \max\{f(\alpha), g(\alpha)\} = \sup h(\alpha)$$

מש"ל.

הגדרה: תהי A קבוצה של סודרים. נסמן בπ_A את הפונקציה שהולכת מטיפוס הסדר של A לA.

תזכורת: $A \subseteq \omega_1$ היא קופינלית אמ"ם $otp(A) = \omega_1$.

הוכחה: $\Longleftarrow$ נניח שטיפוס הסדר הוא ω_1. אז לא ייתכן ש$A \subseteq \alpha < \omega_1$ כי כל סודר שקטן מω_1 הוא בן מניה.

$\Longrightarrow$ ברור ש$otp(A) \leq \omega_1$ כי היא מוכלת בω_1, והוא לא יכול להיות יותר קטן כי היא קופינלית ולכן העוצמה שלה היא ω_1, כי הוא מונה סדיר.

מסקנה: אם $A \subseteq \omega_1$ קופינלית, $\pi_A : \omega_1 \to \omega_1$ שהתמונה שלה היא A.

הגדרה: קבוצה $A \subseteq \omega_1$ נקראת "סגורה" אם: לכל $\beta < \omega_1$, אם $\beta \cap A \neq \emptyset$ אז $\sup(\beta \cap A) \in A$.

תרגיל: תהי $A \subseteq \omega_1$התנאים הבאים שקולים:

1. A סגורה
2. לכל $\beta \in \omega_1$ אם $A \cap \beta$ לא ריקה וללא איבר אחרון אז $\sup A \cap \beta \in A$.
3. לכל $\delta < \omega_1$ אם $\sup A \cap \delta = \delta$ אז $\delta \in A$
4. לכל סדרה עולה ממש של סודרים מA, $\langle \alpha_n : n < \omega \rangle$ מתקיים $\sup \alpha_n \in A$

טענה: תהי $A \subseteq \omega_1$התב"ש:

1. A סל"ח (סגורה ולא חסומה/קופינלית)
2. π_A נורמלית.
3. A לא חסומה וקיימת פונקציה על $h : \omega_1 \to A$ רציפה ועולה במובן החלש. כלומר, אם $\alpha < \beta$ אז $f(\alpha) \leq f(\beta)$.

הוכחה:

$1 \to 2$: ראשית, A לא חסומה ולכן $otp(A) = \omega_1$. כלומר, $\pi_A : \omega_1 \to \omega_1$.

π_A שומרת סדר כי היא איזו סדר.

רציפה: יהי β סודר גבולי. נסתכל על $\pi_A(\beta)$. ידוע ש$\pi_A(\beta) > \pi_A(\alpha)$ לכל $\alpha < \beta$.

נסתכל על $A \cap \pi_A(\beta)$. החיתוך לא ריק, כי לכל $\alpha < \beta$, $\pi_A(\alpha) \in A$. A סגורה, לכן $\sup(\pi_A(\beta) \cap A) \in A$. נקרא לו γ. יש לו מקור, δ. אם $\delta < \beta$, אז בגלל שβ גבולי, $\delta + 1 < \beta$, ואז $\pi_A(\delta) < \pi_A(\delta+1) \in \pi_A(\beta) \cap A$, אז לא ייתכן ש$\pi_A(\delta)$ הוא הסופרימום.

אם $\beta < \delta$, אז בגלל שהפונקציה שומרת סדר, $\pi_A(\beta) < \pi_A(\delta)$. אבל ידוע ש$\pi_A(\beta)$ גדול מכל איברי $A \cap \pi_A(\beta)$. בסיתרה לכך ש$\pi_A(\delta)$ הוא הסופרימום. לכן $\beta = \delta$ כלומר

$$\pi_A(\beta) = \sup_{\alpha < \beta} \pi_A(\alpha)$$

$2 \to 3$: ניקח את h להיות π_A.

$3 \to 1$: נתון שA לא חסומה. נותר להוכיח שA סגורה.

כלומר, צריך להוכיח שאם $\beta = \sup(A \cap \beta)$ אז $\beta \in A$.

כיוון שA לא חסומה, נגדיר

$$\gamma = \min\{\alpha \in \omega_1 : h(\alpha) \geq \beta\}$$

מספיק להראות ש$h(\gamma) = \beta$. ואז $\beta \in A$ כי $h : \omega_1 \to A$.

ראשית, נראה שγ גבולי. אחרת, $\gamma = \delta + 1$.

לא ייתכן ש$\beta \leq h(\delta)$ כי γ הוא הראשון שעושה זאת.

לכן $h(\delta) < \beta$. בגלל שh עולה במובן החלש, אז $h(\delta)$ הוא איבר מקסימלי ב$h[\gamma]$.

כל איבר ב$A\cap\beta$ הוא h של משהו, כי h היא על A. אבל זה צריך להיות h של איבר שהתמונה שלו קטנה מβ. בגלל שh עולה חלש, זה לא יכול להיות h של איבר שגדול שווה לγ.
לכן $A\cap\beta=h[\gamma]$.
בסתירה לכן ש$\sup(A\cap\beta)=\beta$.
לכן γ גבולי. h רציפה, לכן

$$h(\gamma)=\sup h[\gamma]=\sup(A\cap\beta)=\beta$$

קיבלנו ש$\beta=h(\gamma)$ ולכן $\beta\in A$.
תזכורת: מסמנים ב$NS\subseteq P(\omega_1)$ את קבוצה כל הקבוצות שמוכלות בקבוצה מהצורה NS_f עבור איזשהי פונקציה נורמלית f.

$$NS=\{A\subseteq NS_f\,:\,f\text{normal}\,\}$$

הקבוצות בNS הן קבוצות שיש פונקציה נורמלית שמזיזה את כל הנקודות בהן.
טענה: NS הוא אידיאל סיגמא אדיטיבי.
הוכחה: יהיו $\langle A_n\rangle_{n\in\omega}$ קבוצות בNS. לכל n תהי f_n פונקציה נורמלית שמזיזה את כל איברי A_n. אנחנו צריכים לייצר פונקציה נורמלית h שתזיז את כל איברי $\bigcup_{n\in\omega}A_n$.

$$h(\alpha)=\sup_{n<\omega}f_n(\alpha)$$

ראשית נשים לב שסופרימום של קבוצה בת מניה הוא איבר בω_1.
רציפות: יהי β גבולי.

$$h(\beta)=\sup_{n<\omega}f_n(\beta)=\sup_{n<\omega}\sup_{\alpha<\beta}f_n(\alpha)=\sup_{\alpha<\beta}\sup_{n<\omega}f_n(\alpha)=\sup_{\alpha<\beta}h(\alpha)$$

h עולה במובן החלש, כי אם $\alpha<\beta$ אז לכל n $f_n(\alpha)<f_n(\beta)$. ולכן

$$h(\alpha)=\sup f_n(\alpha)\leq\sup f_n(\beta)=h(\beta)$$

h מזיזה את כל האיברים באיחוד, כי אם $\alpha\in A_n$ אז $\alpha<f_n(\alpha)\leq\sup_{n<\omega}f_n(\alpha)=h(\alpha)$.
נסתכל על $A=h[\omega_1]$. לכן A סל"ח. אז $\pi_A:\omega_1\to A$ נורמלית.
לפי התרגול, לכל $\alpha\in\omega_1$, $h(\alpha)\leq\pi_A(\alpha)$.
ולכן לכל $\alpha\in\bigcup A_n$, $\alpha<\pi_A(\alpha)$.
כלומר, היא פונקציה נורמלית שמזיזה את כל האיברים.
תרגיל: חיתוך כלשהו של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה.
טענה: תהי f פונקציה נורמלית. אוסף נקודות השבת S_f הוא סל"ח.
הוכחה: ראינו שזה לא חסום, כי ראינו שלכל סודר יש נקודת שבת מעליו.
סגירות: תהי $\langle\alpha_n\rangle_{n<\omega}$ סדרה עולה ממש בת מניה של נקודות שבת. צריך להוכיח שהגבול היא גם נקודת שבת.
זה נובע מרציפות f. הגבול של הסדרה α הוא סודר גבולי, $\alpha=\sup\alpha_n$, ולכן

$$f(\alpha)=\sup f(\alpha_n)=\sup\alpha_n=\alpha$$

תרגיל: תהי $f:\omega_1\to\omega_1$ פונקציה. אזי $C_f=\{\alpha : f[\alpha]\subseteq\alpha\}$ היא סל"ח. בנוסף, לכל סל"ח C קיימת פונקציה $f:\omega_1\to\omega_1$ כך ש$C_f\subseteq C$

פתרון: החלק הראשון- בתרגול.
נוכיח את החלק השני.
כלומר, תהי C סל"ח.
נגדיר פונקציה

$$f(\alpha)=\min\{\beta\in C : \beta>\alpha\}$$

נשים לב שלכל α, $f(\alpha)>\alpha$. בנוסף, אם $\alpha<\beta$ אז $f(\alpha)\le f(\beta)$.
כעת, יהי α שמקיים $f[\alpha]\subseteq\alpha$. כלומר, לכל $\gamma<\alpha$, $f(\gamma)<\alpha$.
לא ייתכן שα עוקב, כי אם $\alpha=\beta+1$ אז

$$\beta<f(\beta)<\alpha=\beta+1$$

סתירה.
לכן α גבולי.
לכל $\gamma<\alpha$

$$\gamma<f(\gamma)<\alpha$$

לכן

$$\alpha=\sup_{\gamma<\alpha} f(\gamma)$$

הפונקציה f שהגדרנו הולכת מω_1 לC.
לכן $\langle f(\gamma)\rangle$ היא סידרה בת מניה שמוכלת בC, וC סגורה, אז הסופרימום גם שייך לC. כלומר, $\alpha\in C$.

הגדרות:
יהי I אידיאל על קבוצה.
1. $\hat{I}$ מסמן את המסנן הדואלי, כלומר

$$\hat{I}=\{A : A^c\in I\}$$

2. $I^+=I^c$. זה נקרא "אוסף הקבוצות החיוביות".

טענה: יהי I אידיאל מעל Z , $S\in I^+$ ו$C\in\hat{I}$, אז $S\cap C\in I^+$. בפרט, $S\cap C\neq\emptyset$, כי $\emptyset$ שייכת לכל אידיאל.

הוכחה: נפשט את ההגדרות. $S\notin I$, ו$C^c\in I$. אנחנו רוצים להוכיח ש$S\cap C\notin I$.
נב"ש $S\cap C\in I$. מכיוון ש$C^c\in I$ וI אידיאל ולכן סגור כלפי מטה, אז $S\cap C^c\in I$.
I אידיאל ולכן סגור לאיחודים סופיים אז $S=(S\cap C)\cup(S\cap C^c)\in I$. סתירה.

הגדרה: נסמן ב$club$ (unbounded closed) את אוסף הקבוצות שמכילות סל"ח.

דוגמא לקבוצה שמכילה סל"ח ואינה סל"ח: $\omega_1\setminus\{\omega\}$. היא לא סגורה כי יש סדרה שמתכנסת לω אבל ω לא נמצאת היא מכילה את $\omega_1\setminus\omega$. שזאת סל"ח.

טענה: $club$ הוא המסנן הדואלי של NS.

הוכחה:

תהי $A \in club$. כלומר, קבוצה שמכילה סל"ח C. נסתכל על π_C. זאת פונקציה נורמלית שהתמונה שלה היא C. לכן כל איבר שלא בC, הפונקציה בהכרח מזיזה אותו. בפרט, π_C מזיזה את כל האיברים בA^c. לכן $A^c \in NS$.

תהי $A \in NS$. כלומר, יש פונקציה נורמלית f שמזיזה את כל איברי A. S_f, נקודות השבת של f , זה סל"ח. מהגדרה, $S_f \subseteq A^c$. כלומר, A^c מכילה סל"ח. כלומר $A^c \in club$.