מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 13 (פתרון)

<u>שאלה 1</u>
יהיו X,Y מ"ט קשירים מסילתית ו-$A \subset X, B \subset Y$.
<u>הוכיחו</u> ש- $X \times Y - A \times B$ מ"ט קשיר מסילתית.

<u>הוכחה</u>
נסמן: $C = X - A$ ו-$D = Y - B$. אזי $C, D \neq \emptyset$.
קל לבדוק ש-$X \times Y - A \times B = X \times D \cup C \times Y$.
יהיו $p, q \in X \times D \cup C \times Y$. עלינו להוכיח ששתי הנקודות אפשר לחבר על ידי מסילה.
<u>הערה 1.</u> עבור מטרה זו מספיק למצוא שרשרת $S_1, \dots, S_n$ של תת-מרחבים קשירים מסילתית כך ש-$p \in S_1$, $S_{i+1} \cap S_i \neq \emptyset$ ו-$q \in S_n$. ברור שאם $p_i \in S_{i+1} \cap S_i$, אז קיימות מסילות: בין p ל- p_1, בין p_1 ל- p_2,..., בין p_{n-1} ל- q. ועל ידי שרשור המסילות מתקבלת המסילה הנדרשת בין p ל- q.
<u>הערה 2.</u> כל תת-המרכבים S_i שלנו יהיו מסוג $X \times \{y\}$ $(y \in Y)$ או מסוג $\{x\} \times Y$ $(x \in X)$. קשירותם המסילתית של תת-המרכבים האלה נובעת מקשירותם המסילתית של מ"ט X, Y.

ישנם שלושה מקרים אפשריים:

(1) $p \in X \times D, q \in C \times Y$

(2) $p, q \in X \times D$

(3) $p, q \in C \times Y$

אנחנו נגדיר שרשרת המרחבים ונקודות לכל אחד מהמקרים.

<u>מקרה (1)</u>

יהיה $p = (x, d); q = (c, y)$.

אזי לוקחים: $S_1 = X \times \{d\}$, $S_2 = \{c\} \times Y$,

$p_1 = (c, d)$.

<u>מקרה (2)</u>

יהיו $p = (x_p, d_p); q = (x_q, d_q)$, $d_p, d_q \in D$.

כוון ש-$C \neq \emptyset$, קיימת נקודה $c \in C$. אזי:

$S_1 = X \times \{d_p\}$, $S_2 = \{c\} \times Y$, $S_3 = X \times \{d_q\}$,

$p_1 = (c, d_p)$, $p_2 = (c, d_q)$.

<u>מקרה (3)</u>

יהיו $p = (c_p, y_p); q = (c_q, y_q)$, $c_p, c_q \in C$.

כוון ש-$D \neq \emptyset$, קיימת נקודה $d \in D$. אזי:

$S_1 = \{c_p\} \times Y$, $S_2 = X \times \{d\}$, $S_3 = \{c_q\} \times Y$,

$p_1 = (c_p, d)$, $p_2 = (c_q, d)$.

<u>שאלה 2</u>

יהי $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x_1^2 + y_1^2 \leq 1\}$.

יהי $\sim$ יחס שקילות על $\mathbb{R}^2$ כך ש-

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$$
$$\Updownarrow$$
$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \vee ((x_1, y_1) \in D^2 \wedge \ (x_2, y_2) \in D^2))\ .$$

<u>הוכיחו</u> ש- $\mathbb{R}^2/\sim$ הומאומורפי ל-$\mathbb{R}^2$.

<u>הוכחה</u>

נגדיר $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ באופן הבא. יהי $p(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

, אז $\left||p|\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (נורמה). ונגדיר :

$$f(p) = \begin{cases} \left(x\frac{\left||p|\right| - 1}{\left||p|\right|}, y\frac{\left||p|\right| - 1}{\left||p|\right|} \right) & , \left||p|\right| \geq 1 \\ O & , \left||p|\right| \leq 1 \end{cases}$$

(כאן O -ראשית)

או בקוארדינטות קוטביות, אם $p\left(r_p, \theta_p\right)$:

$$f(p) = \begin{cases} (r_p - 1, \theta_p), & r_p \geq 1 \\ O & , r_p \leq 1 \end{cases}$$

נוכיח ש- f העתקת מנה.

טענת עזר 1 f רציפה.

הוכחת רציפות f.

הפונקציה שלמעלה מוגדרת על $B(O,1)^c$. רכיביה רציפים כהרכבות של פונקציות רציפות. לכן היא רציפה בעצמה.
הפונקציה שלמטה מוגדרת על D^2 , קבועה ולכן רציפה.
כלומר, צמצומים של f מוגדרים ורציפים על איבריו של כיסוי סגור $\{D^2, B(O,1)^c\}$ של $\mathbb{R}^2$, כאשר על החיתוך – מעגל היחידה - שני הצמצומים שווים ל- O ולכן f רציפה על $\mathbb{R}^2$, מש"ל.

עכשיו נייצג את $\mathbb{R}^2$ אחרת:
$\mathbb{R}^2 = D^2 \dot\cup G$ כאשר $G = (D^2)^c$. קל לראות ש-
$G = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid ||p|| > 1\}$

טענת עזר 2.

הצימצום $f_G: G \to \mathbb{R}^2 - \{O\}$ הומאומורפיזם.

הוכחת ההומאומורפיזם של f_G.

כדי להוכיח ש-f_G חח"ע ועל נעבור לקואורדינטות קוטביות. נקבל: $f_G(R,\theta) = (R-1,\theta)$ $(R>1)$.
אזי אפשר להגדיר לכל $r > 0$:
$f_G^{-1}: \mathbb{R}^2 - \{O\} \to G$ כך ש-$f_G^{-1}(r,\theta) = (r+1,\theta)$.

השוויונות $f_G \circ f_G^{-1} = Id_{\mathbb{R}^2-\{O\}}$ ו-$f_G^{-1} \circ f_G = Id_G$ נבדקים ישירות. אם נבטא את f_G^{-1} בקואורדינטות קרטזיות נקבל לכל $q(x,y) \neq O$:

$$f_G^{-1}(q) = \left(x\frac{||q||+1}{||q||}, y\frac{||q||+1}{||q||} \right)$$

זה מראה שרכיביה של f_G^{-1} רציפים כהרכבות של פונקציות רציפות. לכן f_G^{-1} רציפה ו-f_G הומאומורפיזם.■

כדי להוכיח ש- f העתקת מנה צריך להוכיח:

(1) f העתקה על : $f_G(G) = \mathbb{R}^2 - \{O\}$ ו-$f(D^2) = O$.

(2) U פתוחה אם ורק אם $f^{-1}(U)$ פתוחה . כיוון "$\Leftarrow$" כבר נובע מהרציפות של f .

<u>נשאר להוכיח: $f^{-1}(U)$ פתוחה גורר ש- U פתוחה.</u>

נסמן $W = f^{-1}(U)$ ונניח ש-W פתוחה.

<u>מקרה 1: $O \neq p \in U$</u>. אז $f_G^{-1}(p) \in G \cap W$. כוון ש-$V = G \cap W$ פתוחה, תמונתה $f_G(V)$ תחת ההומאומורפיזם f_G גם פתוחה. אבל

$$p \in f_G(V) = f(V) \subseteq f(W) = f(f^{-1}(U)) = U$$

לכן p נקודה פנימית של U .

<u>מקרה 2:</u> $O \in U$. מספיק למצוא כדור פתוח
$B(O,1+\varepsilon) \subseteq W$ $(\varepsilon < 0)$, כי אז:
$B(O,\varepsilon) = f\big(B(O,1+\varepsilon)\big) \subseteq U$, כלומר O נקודה פנימית של U .

אז נחפש את הכדור. יהי $K = \overline{B(O,2)} \cap W^c$.
אם $K = \emptyset$ אז $B(O,2) \subseteq W$ ו-$B(O,2)$ הוא הכדור הנדרש.
אם $K \neq \emptyset$ אז K קומפקטי (הינה -בורל).
$K \cap D^2 = \emptyset \Leftarrow K \cap W = \emptyset$. לכן לכול $p \in K$ קיים $\varepsilon_p > 0$ כך ש- $B(p,\varepsilon_p) \cap B(O,1+\varepsilon_p) = \emptyset$. אז אפשר לראות את האוסף $\{B(p,\varepsilon_p)\}_{p\in K}$ ככיסוי פתוח של K. בגלל הקומפקטיות של K קיימים $\{p_1, \dots p_n\} \subseteq K$ כך ש- $\cup_{i=1}^{n} B(p_i,\varepsilon_{p_i}) \supseteq K$. אם נגדיר $\varepsilon = \min\limits_{1\le i\le n} \varepsilon_{p_i}$, אז $K \cap B(O,1+\varepsilon) = \emptyset$. לכן $B(O,1+\varepsilon) \subseteq W \Leftarrow W^c \cap B(O,1+\varepsilon) = \emptyset$.■

הוכחנו ש-U פתוחה ואז f - העתקת מנה.
לפי התנאי, f מכבד מאוד את היחס $\sim$. לכן $\hat{f}$ הומאומורפיזם בין $\mathbb{R}^2/\sim$ לבין $\mathbb{R}^2$ (ההרצאה), מש"ל.

<u>שאלה 3</u>

יהיו X,Y מ"ט ו- $f: X - Y$, $g: Y \to X$ העתקות רציפות כך ש- $f \circ g = Id_Y$. <u>הוכיחו</u> ש-f העתקת מנה.

<u>הוכחה</u>

(1) (1)תהי $V \subseteq Y$ קבוצה פתוחה, לכן $f^{-1}(V)$ פתוחה (f רציפות).

(2) תהי $V \subseteq Y$ ו-$f^{-1}(V)$ פתוחה. אזי $g^{-1}\left(f^{-1}(V)\right)$ פתוחה (רציפות g). אבל:

$g^{-1}\left(f^{-1}(V)\right) = (f \circ g)^{-1}(V) = Id_Y^{-1}(V) = V$,

כלומר V פתוחה.

אז f העתקת מנה לפי ההגדרה, מש"ל.

<u>שאלה 4</u>

יהי $\sim$ יחס שקילות על $\mathbb{R}$ כך ש- $x \sim y \Leftrightarrow \sin x = \sin y$.

<u>הוכיחו</u> ש- $\mathbb{R}/\sim$ הומאומורפי ל- [0,1].

<u>הוכחה</u>

נגדיר $f: \mathbb{R} \to [-1,1]$ כך שלכל $x \in$: $f(x) = \sin x$.

אזי f מכבדת מאוד את $\sim$. נייצג f כהרכבה: $f = \hat{f} \circ \rho$

כאשר $\rho: \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\sim$ ו-$\hat{f}: \mathbb{R}/\sim \ \to [-1,1]$ (ההרצאות).

לכן $\hat{f}$ חח'ע. חוץ מזה ידוע ש-$f(\mathbb{R}) = [-1,1]$, כלומר,

f – על ולכן גם $\hat{f}$ -על.

f – רציפה, אז $\hat{f}$ רציפה (ההרצאות)

הדבר האחרון: $\rho\left(\mathbb{R}\right) = \rho\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] = \mathbb{R}/\sim$ כי

$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ מכיל נציגים של כל מחלקות השקילות.

וכוון ש-$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ קומפקטי ו-ρ רציפה, אז $\mathbb{R}/\sim$ קומפקטי.

מכאן: כוון ש-$[-1,1]$האובדורף, אז $\widehat{f}: \mathbb{R}/\sim\ \to [-1,1]$

סגורה וכוון שהיא גם רציפה, חח"ע ועל, היא –

הומאומורפיזם, מש"ל.