סופי (1)

פתרון מועד א' לינארית 1 קיץ 2013

חלק ב

(4) נתון $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מקיימת $A^{-1}=A^2$. ב:3 $\det A=?$

פתרון: $A^{-1}=A^2 \iff A^3=I \Rightarrow |A^3|=|I|=1$

$\xRightarrow{\text{כפליות } \det} |A|^3=1$.

$\Rightarrow$ (א) אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$: $x^3=1 \Rightarrow x=1$

$\Rightarrow \det(A)=1$.

(ב) $\mathbb{F}=\mathbb{C}$: $z^3=1 \Rightarrow z_i=Cis(\frac{2i\pi}{3})$ $i=0,1,2$

$\Rightarrow \det(A)\in\{Cis(0)=1,\ Cis(\frac{2\pi}{3}),\ Cis(\frac{4\pi}{3})\}$.

(ג) $\mathbb{F}=\mathbb{Z}_7$: יש לפתור את $x^3=1$ מעל $\mathbb{Z}_7$

נסיון וטעיה מעבר על כל האפשרויות (יש רק 7)

ונקבל $\det(A)\in\{1,2,4\}$.

$T(a+bx+cx^2)= \cdots$

5

א) יש למצוא מטר' מייצגת ביחס לבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_2[x]$

כלומר $E=\{1,x,x^2\}$

נזכר כי:

$$[T]_E^E = \left([T(1)]_E, [T(x)]_E, [T(x^2)]_E\right)$$

נחשב:

$$[T(1)]_E = [1+tx+x^2]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[T(x)]_E = [1+(2t-1)x+tx^2]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t-1 \\ t \end{pmatrix}$$

$$[T(x^2)]_E = [t+x+tx^2]_E = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad [T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ t & 2t-1 & 1 \\ 1 & t & t \end{pmatrix}.$$

ב) כדי לענות על סעיף זה נדרג את $[T]_E$ ונסיק את התשובה.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ t & 2t-1 & 1 \\ 1 & t & t \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & t-1 & 1-t^2 \\ 0 & t-1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & t-1 & 1-t^2 \\ 0 & 0 & t^2-1 \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ אם $t-1\neq 0$ וגם $t^2-1\neq 0$ אז $r([T]_E)=3$ (כלומר $t\neq\pm1$)

$\Leftarrow$ $[T]_E$ הפיכה $\xLeftarrow{\text{משפט}}$ T הפיכה. $\Leftarrow$ T חח"ע ועל.

ולכן נותר לבדוק את המקרים $t=\pm1$.

$t=1$: נציב 2 בצורה המשולשית ונקבל

$$[T]_E \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x=-y-z \\ y=s \quad z=k \end{matrix}$$

$$\Rightarrow Null([T]_E)=Span\underbrace{\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}}_{\text{Col}_N} \Rightarrow \dim Null=2.$$

בסיס לפי

$$\Rightarrow r([T]_E)=1$$

נזכר ש- $Null[T]_E$ מסמל את קואורדינטות $Ker T$ לפי בסיס E

⇐ יש לתרגם את בסיס $Null([T]_E)$ לבסיס עבור $Ker T$

$\dim Ker(T)=2 \Leftarrow B_{Ker(T)}=\{-1+x, -1+x^2\} \Leftarrow$

⇐ או לפי משפט הדרגה לדרגה או לפי ההתאמה עם מרחב העמודות של $[T]_E$ נקבל $\dim(Im(T))=1$.

$t=-1$: נציב בצורה המשולשית ונקבל:

$$[T]_E \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} y=0 \quad z=s \\ x=s \end{matrix}$$

$$\Rightarrow Null([T]_E)=Span\underbrace{\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}}_{\text{Col}_N} \Rightarrow \dim Null[T]_E=1$$

בסיס לפי

$$\Rightarrow r([T]_E)=2$$

מאותם שיקולים כמו מקודם נקבל: $\dim Ker(T)=1$ $B_{Ker(T)}=\{1+x^2\}$

$\dim Im(T)=2$

בסה"כ תשובה סופית:

T חח"ע $\iff t\neq\pm1$

T על $\iff t\neq\pm1$

$t=1$: $\dim\ker T=2$ $\quad B_{\ker(T)}=\{-1+x,-1+x^2\}$ $\quad \dim(\mathrm{Im}(T))=1$

$t=-1$: $\dim\ker T=1$ $\quad B_{\ker(T)}=\{1+x^2\}$ $\quad \dim(\mathrm{Im}(T))=2$

6 א) צ"ל להוכיח כי A בסיס

נשים את הוקטורי A כעמודות מטריצה M ונחשב det. לפי משפט A בסיס $\iff$ M הפיכה $\iff$ $|M|\neq0$

$$|M|=\left|\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\1&3&1\end{pmatrix}\right|=-2\neq0\implies A \text{ בסיס}.$$

ב) נסמן $B=\{w_1,w_2,w_3\}$ ונתון כי $[I]^A_B=P$

צ"ל את B.

אסטרטגיה: אם נמצא את $[w_i]_A$ נוכל לחשב את B.

אבל $[I]^B_A=\left([w_1]_A,\dots,[w_3]_A\right)$ ונזכר ש:

לפי הנתון $[I]^B_A=\left([I]^A_B\right)^{-1}=P^{-1}$ ולכן נחשב את P^{-1}.

ע"י ... ההופכית (או דרך שורות) ונקבל

$$P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-2&0\\1&1&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

סוף (9)

$$[W_1]_A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow W_1 = \frac{1}{2}V_2 + \frac{1}{2}V_3 = \begin{pmatrix}1\\1.5\\2\end{pmatrix} \Leftarrow$$

$$[W_2]_A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow W_2 = \frac{1}{2}V_1 + \frac{1}{2}V_2 + \frac{1}{2}V_3 = \begin{pmatrix}0\\+1.5\\1\end{pmatrix}$$

$$[W_3]_A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow W_3 = -\frac{1}{2}V_2 + \frac{1}{2}V_3 = \begin{pmatrix}0\\-0.5\\-1\end{pmatrix}.$$

ומצאנו את הבסיס B |

ג) נתון: $V = V_1 + 2V_2 + 3V_3$ ונמצא את $[V]_B$

נשים לב ש $[V]_A = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ לפי הגדרת קואורדינטות.

! $[I]_B^A \cdot [V]_A = [V]_B$ ולכן נותר להכפיל.

$$P \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$[V]_B = \begin{pmatrix}6\\-1\\1\end{pmatrix}. \Leftarrow$$

בדיקה:

$$V = 6W_1 - W_2 + W_3 = \begin{pmatrix}6\\7\\10\end{pmatrix} \checkmark$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \begin{pmatrix}6\\7\\10\end{pmatrix} \checkmark$$