הוכחה באינדוקציה מתמטית

10 בנובמבר 2015

ניתן לאשר נכונותן של טענות בעזרת עקרון האינדוקציה המתמטית.

עקרון האינדוקציה המתמטית

טענה 0.1 תהי $P(n)$ טענה התלוייה ב־n. על מנת ש־$p(n)$ תתקיים לכל n טבעי מספיק שיתקיימו התנאים הבאים:

1) בסיס האינדוקציה: $p(1)$ טענה נכונה (לפעמים מתחילים מ־$p(m)$ כאשר $m > 1$ ולפעמים מ־$p(0)$)

2) הנחת האינדוקציה: נניח שהטענה $p(n)$ נכונה

3) שלב האינדוקציה: אם $p(n)$ נכונה אז $p(n+1)$ נכונה.

הערה 0.2 1) לעתים מתעורר צורך להוכיח ש־$p(n)$ מתקיים לכל מספר טבעי החל ממספר טבעי N נתון. לשם כך שמספיק להראות ש־$p(N)$ מתקיימת ושלכל $n \geq N$ אם $p(n)$ מתקיימת אז $p(n+1)$ מתקיימת.

2) מעקרון האינדוקציה ניתן לקבל את הניסוח הבא: נתונה סדרת מספרים טבעיים $n_1, n_2, n_3, \ldots$. אם טענה מסויימת נכונה עבור n_1 ואם מההנחה שהיא נכונה עבור n_k נובע שהיא נכונה עבור n_{k+1} אז היא נכונה לכל איברי הסדרה.

השלבים בהוכחת האינדוקציה

שלב 1: בודקים את נכונות הטענה עבור $n = 1$ ע"י שמציבים 1 במקום n (אם הטענה נכונה רק החל מ־$n = m$ אשר $\mathbb{N} \ni m > 1$ אז בודקים את הטענה עבור m)

שלב 2: מניחים את הנחת האינדוקציה כלומר מניחים שהטענה נכונה עבור n.

שלב 3 : מוכיחים את נכונות הטענה עבור $n+1$ בהסתמך על הנחת האינדוקציה עבור n.

דוגמה1: הוכח באינדוקציה שלכל $n \in \mathbb{N}$ נכונה הנוסחה:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$$

פתרון:

שלב 1: בודקים את נכונות הטענה עבור $n = 1$ ע"י הצבה בשני האגפים . נשים לב שבאגף שמאל יש לנו n איברים והאיבר האחרון הוא נוסחה כללית עבור כל אחד מהמחוברים כאן, ולכן אם נציב בה את $n = 1$ נקבל פשוט את באיבר בראשון : $1 \cdot 2 = 1 \cdot (1+1)$ וזה בדיוק האיבר הראשון. כעת נציב $n = 1$ באגף ימין ונבדוק האם הוא שווה לצד שמאל: $\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (1+1)(1+2) = 2$ ולכן הטענה נכונה עבור $n = 1$.

שלב 2: נניח את נכונות של הטענה עבור n כלומר נניח שהביטי $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\dots n\left(n+1\right)=\frac{1}{3}n\left(n+1\right)\left(n+2\right)$

שלב 3: רוצים להוכיח את הטענה עבור $n+1$, כלומר נרצה להוכיח ש:

$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n\left(n+1\right)+\left(n+1\right)\left(n+2\right)=\frac{1}{3}\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(n+3\right)$ $(*)$

שלב 4 (שלב ההוכחה):

לפי הנחת האינדוקציה $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n\left(n+1\right)=\frac{1}{3}n\left(n+1\right)\left(n+2\right)$

אבל אלה הם בדיוק n האיברים הראשונים ב־$(*)$

לכן מספיק להוכיח ש־$\frac{1}{3}n\left(n+1\right)\left(n+2\right)+\left(n+1\right)\left(n+2\right)=\frac{1}{3}\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(n+3\right)$

נתבוננן באגף משאל של הביטוי הקודם, נוציא את $\left(n+1\right)\left(n+2\right)$ אל מחוץ לסוגריים ונקבל $\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(\frac{1}{3}n+1\right)=\frac{1}{3}\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(n+3\right)$ וזה בדיוק הביטוי באגף שמאל וזה מה שוצינו להוכיח.

דוגמה 2: הוכח באינדוקציה שלכל n טבעי הביטוי $n^{3}-n$ מתחלק ב־6 ללא שארית.

פתרון:

שלב 1: נבדוק האם הטענה נכונה עבור $n=1$: $1^{3}-1=0$ ואפס מתחלק ב־6 ללא שארית.

שלב 2: נניח את נכונות הטענה עבור n כלומר נניח ש־$\frac{n^{3}-n}{6}\in\mathbb{Z}$

שלב 3: נוכיח את הטענה עבור $n+1$: כלומר צ"ל $\frac{(n+1)^{3}-(n+1)}{6}\in\mathbb{Z}$

שלב 4: $\frac{(n+1)^{3}-(n-1)}{6}=\frac{n^{3}+3n+3n^{2}+1-1}{6}=\frac{\left(n^{3}-n\right)+\left(3n^{3}+3n-1+1\right)}{6}=\frac{n^{3}-n}{6}+\frac{3n^{3}+3n}{6}$

לפי הנחת האינדוקציה המחובר הראשון מתחלק ב־6 ללא שארית, נתבונן במחובר השני: $\frac{3n(n+1)}{6}=\frac{n(n+1)}{2}$ ולכן מספיק לנו להוכיח ש־$n\left(n+1\right)$ הוא זוגי אבל ברור שזה נכון כי מכפלה של שני מספרים טבעים עוקבים היא מספר זוגי.

דוגמה 3 :

הוכח באינדוקציה שלכל $n\geq3$ מתקיים אי השוויון: $\frac{3}{5}<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}$

פתרון:

שלב 1: בדיקה עבור $n=1$: $\frac{3}{5}=\frac{36}{60}<\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{37}{60}$ ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$

שלב 2: נניח שהטענה נכונה עבור n כלומר נניח שמתקיים $\frac{3}{5}<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$ $(**)$

שלב 3: רוצים להוכיח את הטענה עבור $n+1$ כלומר צ"ל: $\frac{3}{5}<\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$

שלב 4: נשים לב שלפי הנחת האינדוקציה מתקיים $(**)$

ולכן אם נעביר את $\frac{1}{n+1}$ אז נקבל $\frac{3}{5}-\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}$ ולכן מספיק לנו להוכיח ש:

$\frac{3}{5}<\frac{3}{5}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$ $\Leftarrow$ נצמצם את $\frac{3}{5}$ ונקבל שנרצה להוכיח ש־$0<-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$ כלומר נרצה להוכיח שהביטוי הזה הוא חיובי: נעשה מכנה משותף ונקבל

$\frac{1}{2(2n+1)(n+1)}$ שהוא כמובן ביטוי חיובי.

סדרות מונוטוניות

הגדרות:

1) סדרה $\{a_{n}\}$ היא מונוטונית לא יורדת אם קיים $n_{0}\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq n_{0}$ מתקיים $a_{n}\leq a_{n+1}$.

2) סדרה $\{a_{n}\}$ היא סדרה מונוטונית עולה אם $a_{n}<a_{n+1}$ החל מאיזה שהוא $n_{0}\in\mathbb{N}$.

3) סדרה $\{a_n\}$ היא מונוטונית לא עולה אם קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq n_0$ $a_{n+1} \leq a_n$
4) סדרה $\{a_n\}$ היא מונוטונית יורדת אם $a_{n+1} < a_n$ החל מאיזה שהוא $n_0 \in \mathbb{N}$.
דוגמאות:
1) הסדרה ההרמונית $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ היא מוניטונית יורדת כי: $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$
2) $a_n = 2^n$ היא מונוטונית עולה כי: $a_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2^n = a_n$
3) נראה שהסדרה $b_n = 2^n - n$ היא מונוטונית עולה:
$b_{n+1} = 2^{n+1} - (n+1) = 2 \cdot 2^n - n - 1 = 2^n - n + 2^n - 1 \geq 2^n - n = b_n$.

משפט 0.3 כל סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת.

מסקנה 0.4 סדרה מונוטונית עולה ולא חסומה מלרע שואפת לאינסוף. באותו אופן סדרה מונוטונית יורדת ולא חסומה מלעיל שואפת ל מינוס אינסוף.
תרגיל: הוכח שסדרה $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$ מתכנסת.
פתרון: נשתמש במשפט הקודם , כלומר נוכיח שהסדרה היא מונוטונית וחסומה ולכן מתכנסת:
נוכיח קודם שהיא מונוטונית:
$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) =$
$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} = 0$ נעביר את a_n אגף ונקבל $a_{n+1} < a_n$ ולכן הסדרה היא יורדת, נוכיח שהיא חסומה: הראינו שהיא מונוטונית יורדת לכל n טבעי, ולכן היא חסומה מלעיל ע"י a_1, נרצה להוכיח שהיא לסומה מלרע:
$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ (יש כאן סכום של n איברים)
ולכן היא חסומה גם מלרע ולכן היא חסומה וגם מונוטונית ולכן מתכנסת ע"פ המשפט הקודם.
תרגיל: תהי $\{a_n\}$ סדרה המוגדרת ע"י רקורסיה $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ $a_1 = \sqrt{2}$. הוכח כי הסדרה מתכנסת וחשב את גבולה.
פתרון: ראשית כל נראה שהסדרה מונוטונית עולה. נוכיח באינדוקציה על n
כי $a_n < a_{n+1}$ לכל n. עבור $n = 1$, $a_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2 + \sqrt{2}} = a_1$
שלב 2: נניח נכונות עבור n כלומר נניח ש־ $a_n < a_{n+1}$
שלב 3: רוצים להוכיח את הטענה עבור $n+1$ כלומר רוצים להוכיח ש־ $a_{n+1} < a_{n+2}$
שלב 4: $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + a_{n+1}} = a_{n+2}$ כאן השתמשנו בהנחת האינדוקציה $a_n < a_{n+1}$.
הוכחנו שסדרה היא מונוטונית עולה, נוכיח שהיא חסומה:
גם כאן נוכיח האינדוקציה שלכל $n \in \mathbb{N}$ $a_n < 2$.
שלב 1: עבור $n = 1$ נקבל $a_1 = \sqrt{2} < 2$
שלב 2: נניח נכונות של הטענה עבור n כלומר נניח ש: $a_n < 2$
שלב 3: נרצה להוכיח שזה נכון גם עבור $n+1$ כלומר רוצים להוכיח ש: $a_{n+1} < 2$
שלב 4: $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + 2} = 2$ לפי הנחת האינדוקציה.
הוכחנו שהסדרה היא לסומה מלעיל היא גם חסומה מלרע ע"י a_1 כי היא מונוטונית לכל n ולכן היא מתכנסת.
נמצא את הגבול שלה: $c = lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty} a_{n+1} = lim\sqrt{2 + a_n} = \sqrt{2 + c}$
ולכן קיבלנו משוואה $c = \sqrt{1 + c}$ נעלה בריבוע את שני האגפים ונפתור את המשוואה הריבועית המתקבלת ונקבל שהגבול הוא $c = 2$.
תרגיל: נגדיר ספרה ע"י רקורסיה: $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$ $a_1 = 2$, הוכח כי הסדרה מתכנסת וחשב את גבולה.

פתרון: נוכיח שהסדרה היא מונוטונית וחסומה.

תזכורת: לכל n מספרים ממשיים חיוביים $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ מתקיים: $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}$ הביטוי שבצד שמאל באי שוויון נקרא ממוצע הנדסי ומצד ימין ממוצע אריתמטי.

נשתמש בזה שהממוצע החשבוני של שני מספרים ממשיים חיוביים גדול או שווה לממוצע האריתמטי שלהם. $1 = \sqrt{a_n \cdot \frac{1}{a_n}} \geq \frac{a_{n+1}+\frac{1}{a_n}}{2} = a_{n+1}$ קיבלנו שהסדרה חסומה מלעיל ע"י 1

נוכיח שהיא מונוטונית: $= \frac{1}{2}\left(a_n + a_n\right) \leq \frac{1}{2}\left(a_n + 1\right) \leq \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) = a_{n+1}$ a_n(אי שוויום ראשון נכון כי כל אחד מאיברי הסדרה גדול מ־1 ולכן לכל n $1 > \frac{1}{a_n}$ ואי שוויון שני נכון שוב בגלל שהוכחנו שכל אחד מאיברי הסדרה גדול מ־1) לכן היא מונוטונית יורדת לכל n טבעי ולכן היא חסומה ע"י a_1 מלעיל אבל היא גם חסומה מלרע ע"י 1 ולכן חסומה.

סה"כ קבלנו שהיא מונוטונית וחסומה ולכן מתכנסת.

כדי למצוא את גבולה נשתמש באותה שיטה כמו מקודם, $= \left(a_n\right) c = lim_{n\to\infty}$ $lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}\right) = lim\left(\frac{a_n+\frac{1}{a_n}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(lim\left(a_n\right) + lim\left(\frac{1}{a_n}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(c + \frac{1}{c}\right)$ גם כאן נפתור את המשוואה המתקבלת ונקבל ש־$c = 1$.