

תרגיל 5

1. תהי (X, τ_{cof}) קבוצה אינסופית עם הטופולוגיה הקו-סופית עליה. תזכורת: בתרגיל הקודם הוכחתם את סעיף (a).

(א) תהי $\{x_n\} \subseteq X$ סדרה. הוכיחו שמתקיים אחד מהמקרים הבאים:

i. $\{x_n\}$ לא מתכנסת.

ii. ל $\{x_n\}$ יש גבול יחיד.

iii. $\{x_n\}$ מתכנסת לכל איבר ב X .

פתרון. נניח כי $\{x_n\}$ מתכנסת ואין לה גבול יחיד. נניח כי $x' \neq x''$ גבולות שלה. נקבל כי לכל איבר $a \in X$ קיים מיקום n_a שהחל ממנו הסדרה שונה מ a . הוכחה: יהא $a \in X$ אזי $\{a\}^c$ הוא סביבה פתוחה של x' או x'' ולכן לפי הגדרת הגבול החל ממקום מסוים כל איברי הסדרה נמצאים ב $\{a\}^c$ כלומר לא שווים ל a . כעת נוכיח כי כל $x \in X$ הוא גבול שלה. יהא $x \in X$ נתון ויהא U סביבה פתוחה של x . לפי הגדרת הטופולוגיה U^c סופי ולכן נוכל להגדיר $N = \max \{n_a \mid a \in U^c\}$ ולקבל כי החל ממיקום N איברי הסדרה $\{x_n\}$ שונים מכל איברי U^c ולכן בפרט ממקום זה איברי $\{x_n\}$ שייכים ל U כנדרש.

(ב) יהי Y מרחב טופולוגי מטריזבילי, ותהי $f : X \rightarrow Y$ פונקציה רציפה. הוכיחו ש f קבועה.

פתרון. נבחר תת קבוצה $\{x_n\}$ מעוצמה \aleph_0 ש ל X . טענה: $\{x_n\}$ כסדרה מתכנסת לכל איבר ב X . הוכחה: יהא $x \in X$ ותהא U סביבה פתוחה של x . מהגדרת U^c סופית ולכן ממקום כלשהוא בסדרה, איברי הסדרה $\{x_n\}$ נמצאים ב U כנדרש. כעת אם $x_n \rightarrow x$ אזי $f(x_n) \rightarrow f(x)$ כיוון ש f רציפה. כיוון שכל $x \in X$ הוא גבול של הסדרה $\{x_n\}$ נקבל כי כל $x \in X$ מקיים כי $f(x)$ הוא גבול של הסדרה $\{f(x_n)\}$. במרחב מטריזבילי הגבול יחיד ל $\{f(x_n)\}$ גבול יחיד שנשמנו y ומכאן נקבל שכל $x \in X$ מקיים $f(x) = y$.

(ג) הוכיחו ש (X, τ_{cof}) אינו מטריזבילי. (הוכיחו שבעבור קבוצה סופית הטופולוגיה הקוסופית היא מטריזבילית)

פתרון. במקרה ש X סופית אזי הטופולוגיה הקו-סופית מתלכדת עם הטופולוגיה הדיסקטית שהיא מטריזבילית. במקרה שלנו, X אינה סופית ונוכיח כי הוא אינו מטריזבילי. נניח בשלילה כי הוא מטריזבילי אזי $Id : X \rightarrow X$ רציפה ואינה קבועה. סתירה לסעיף הקודם.

2. הוכיחו שהרכבה של פונקציות רציפות היא רציפה.

פתרון. נניח כי $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ רציפות (X, Y, Z מרחבים טופולוגיים). יהא U פתוחה ב Z ונרצה להוכיח כי $(g \circ f)^{-1}(U)$ פתוחה ב X אךן $g^{-1}(U)$ פתוחה ב Y כי g פתוחה ואז $(g^{-1}(U))$ פתוחה ב X כי f רציפה. כיוון ש

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$$

סיימנו.

3. יהי X מרחב טופולוגי ויהיו $A, B, C \subseteq X$ תתי קבוצות כך ש $C \subseteq A \cup B$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

(א) אם C פתוחה ב $A \cup B$ אז $A \cap C$ פתוחה ב A ו $B \cap C$ פתוחה ב B .

פתרון. נכון. אם C פתוחה ב $A \cup B$ אז $A \cap C$ פתוחה ב A פשוט לפי הגדרה של טופולוגית תת מרחב. כנ"ל $B \cap C$ פתוחה ב B .

i. אם $A \cap C$ פתוחה ב A ו $B \cap C$ פתוחה ב B אז C פתוחה ב $A \cup B$.

פתרון. לא. ניקח $X = \mathbb{R}$ ו $A = C = \{0\}$ אז $A \cap C$ פתוחה ב A . ניקח $B = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ אז $B \cap C = \emptyset$ פתוחה אבל $\{0\}$ לא פתוחה ב $A \cup B = \mathbb{R}$

4. (א) יהי X מרחב טופולוגי. ניקח תתי קבוצות $Z \subseteq Y \subseteq X$. הטופולוגיה של X משרה טופולוגיות תת מרחב על Y וזו משרה טופולוגית תת מרחב על Z . הראו שזו בדיוק טופולוגית תת המרחב ש X משרה על Z (אם הטענה הזאת הייתה לא נכונה היה מאוד קשה לדבר על תתי מרחבים).

פתרון. נכניס סימונים כאלה: τ היא הטופולוגיה של X , τ_Y ו τ_Z הן טופולוגיות התת מרחב על Y ו Z בהתאמה. כמו כן σ תהיה טופולוגית תת המרחב ש (Y, τ_Y) משרה על Z . צריך להוכיח ש $\sigma = \tau_Z$. נוכיח הכלה דו כיוונית. נניח $A \in \sigma$ כלומר $A = Z \cap U$ כאשר $U \in \tau_Y$. לפי הגדרה $U = Y \cap V$ כאשר $V \in \tau$ לכן

$$A = Z \cap Y \cap V = Z \cap V$$

כאשר V פתוחה ב X . לפי הגדרה זה אומר ש $A \in \tau_Z$. מצד שני נניח $A \in \tau_Z$ כלומר

$$A = Z \cap U$$

כאשר U פתוחה ב X . אז היות ש $Z \subseteq Y$ נקבל ש

$$A = Z \cap Y \cap U$$

ולפי הגדרה $Y \cap U \in \tau_Y$ ולכן

$$A \in \sigma$$

כנדרש. קיבלנו מה שרצינו.

(ב) הוכיחו כי טופולוגית תת מרחב של טופולוגיה קו-סופית היא בעצמה טופולוגיה קו-סופית.

פתרון: נניח X מרחב עם טופולוגיה קו סופית ו $Y \subseteq X$. צריך להוכיח שהקבוצות הסגורות ב Y הן בדיוק הקבוצות הסופיות. תהי $A \subseteq Y$ קבוצה סגורה אז

$$A = Y \cap U$$

כאשר U סגורה ב X כלומר U סופית ולכן גם A סופית. מצד שני נניח ש $A \subseteq Y$ סופית. אז

$$A = Y \cap A$$

אבל A סגורה ב X (כי היא סופית) ולכן היא גם סגורה ב Y . כנדרש.

5. יהי (X, τ) מ"ט. הוכיחו ש (X, τ) טריויאלי אמ"ם לכל $A \subseteq X, \emptyset \neq A$ צפופה ב X .
פתרון:

(\Rightarrow) צ"ל $\tau = \{\emptyset, X\}$. נניח בשלילה כי $\tau = \{\emptyset, X, O \neq O\}$ אזי $O^c \neq \emptyset$ סגורה ולכן $cl(O^c) = O^c \neq X$ בסתירה לנתון.
(\Leftarrow) צ"ל לכל $A \subseteq X, \emptyset \neq A$ צפופה ב X . תהא $\emptyset \neq A \subseteq X$ כיוון שהנתון הוא ש $\tau = \{\emptyset, X\}$ הקבוצות הסגורות היחידות הן $\{\emptyset, X\}$ ולכן $cl(A) = X$ כלומר A צפופה.

6. יהי X מרחב טופולוגי. תהינה $U \subseteq X$ קבוצה פתוחה ו- $A \subseteq X$ קבוצה צפופה, כלומר $cl(A) = X$.

(א) הוכיחו: $U \subseteq cl(A \cap U)$.

פתרון:

יהא $x \in U$ צ"ל $x \in cl(A \cap U)$. ש"ל לכל סביבה פתוחה $x \in V$ מתקיים כי $A \cap U \cap V \neq \emptyset$. אכן, לכל V כזאת, כיוון ש $U \cap V$ פתוחה לא ריקה (כי $x \in U \cap V$) ו A צפופה מתקיים כי $A \cap U \cap V \neq \emptyset$.

(ב) הוכיחו: $cl(U) = cl(A \cap U)$.

פתרון:

(\subseteq) מסעיף קודם $U \subseteq cl(A \cap U)$ ולכן $cl(U) \subseteq cl(A \cap U)$
(\supseteq) $A \cap U \subseteq U$ ולכן $cl(A \cap U) \subseteq cl(U)$

7. יהי (X, τ) מ"ט ו A, B תתי קבוצות. הוכיחו/ הפריכו: במקרה שאין שוויון, האם יש הכלה שנכונה תמיד?

(א) $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$

(ב) $int(A \cup B) = int(A) \cup int(B)$

פתרון:

i. $A \cap B \subseteq A$ ולכן $int(A \cap B) \subseteq int(A)$. באופן דומה, $int(A \cap B) \subseteq int(B)$. לכן $int(A \cap B) \subseteq int(A) \cap int(B)$.
ii. $int(A) \subseteq A, int(B) \subseteq B$ לכן $int(A) \cap int(B) \subseteq A \cap B$. בנוסף, $int(A) \cap int(B)$ פתוח כחיתוך סופי של פתוחות, ולכן מוכל ב $int(A \cap B)$. (שזה האיחוד של כל הקבוצות הפתוחות שמוכלות ב $A \cap B$).

ii. \supseteq : $A \subseteq A \cup B$ ולכן $\text{int}(A) \subseteq \text{int}(A \cup B)$ באופן דומה $\text{int}(B) \subseteq \text{int}(A \cup B)$.

$\text{int}(A) \cup \text{int}(B) \subseteq \text{int}(A \cup B)$ לכן $\text{int}(A \cup B)$

הכיוון השני לא נכון. נביא דוגמה נגדית. $A = [0, 1], B = [1, 2]$ אז

$$\text{int}(A) \cup \text{int}(B) = (0, 1) \cup (1, 2) \quad \text{מצד שני,} \quad \text{int}(A \cup B) = \text{int}([0, 2]) = (0, 2)$$

8. עוד תרגילים:

(א) הראו כי \mathbb{R}^n ספרבילי.

(ב) הוכיחו כי מרחב הסדרות l_2 ספרבילי.

(ג) חיתוך של שתי קבוצות צפופות ופתוחות הוא צפוף.

(ד) קבוצה A במרחב X דלילה אמ"מ $\text{cl}(A)$ דלילה ב- X .

(ה) אם A דלילה ב- X אז A^c צפופה ב- X .

(ו) מצאו דוגמה למרחב טופולוגי ואוסף בן מנייה של קבוצות דלילות שאיחודן לא דליל.