<u>תזכורת:</u>

הדטרמיננטה של A ריבועית מסדר n מוגדרת כך:

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} sign\left(\sigma\right) a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)}$$

כאשר S_n היא קבוצת התמורות – הפונקציות ההפיכות – מהקבוצה $\{1, \ldots, n\}$ לעצמה.

איך משפיעות פעולות השורה על הדטרמיננטה? החלפת שורה מחליפה את הסימן, כפל שורה בסקלר מכפיל את הדטרמיננטה באותו סקלר, הוספת כפולה של שורה לשורה אחרת לא משנה את הדטרמיננטה.

כמו כן, הדטרמיננטה של מטריצה משולשית היא מכפלת איברי האלכסון. לכן, כדי לחשב דטרמיננטה מבלי להשתמש בתמורות, אפשר לדרג את המטריצה, ולחשב את מכפלת איברי האלכסון. יש להתחשב בפעולות שביצענו, ולכן עדיף להשתמש רק בהוספת כפולה של שורה לשורה אחרת.

A הפיכה אם ורק אם $|A| \neq 0$.

מטריצות פעולה – אם ρ פעולת שורה, אז נסמן ב־$\rho\left(A\right)$ את המטריצה המתקבלת מ־A ע"י הפעלת פעולת השורה ρ. $\rho\left(I\right)$ נקראת מטריצת הפעולה, ומתקיים: $\rho\left(A\right) = \rho\left(I\right) A$.

<u>כפליות הדטרמיננטה:</u>

נוכיח שאם A, B ריבועיות מאותו סדר, אז: $|AB| = |A| \cdot |B|$.

נתחיל מלהוכיח ש: $|\rho\left(I\right) A| = |\rho\left(I\right)| \cdot |A|$, כלומר אם אחת מהמטריצות היא מטריצת פעולה אז כפליות מתקיימת.

אם כן, צריך להוכיח ש: $|\rho\left(A\right)| = |\rho\left(I\right) A| = |\rho\left(I\right)| \cdot |A|$. נראה שזה נכון לכל פעולת שורה.

אם ρ מחליפה שורות, אז: $|\rho(A)| = -|A|$, ומצד שני: $|\rho(I)| \cdot |A| = -|I| \cdot |A| = -|A|$ ואכן: $|\rho(A)| = |\rho(I)| \cdot |A|$. נשים לב ש־$|I| = 1$, כי זו מטריצה משולשית וכל איברי האלכסון הם 1.

אם ρ מכפילה שורה בסקלר α, אז: $|\rho(A)| = \alpha|A|$, ומצד שני: $|\rho(I)| \cdot |A| = \alpha|I| \cdot |A| = \alpha|A|$ ואכן: $|\rho(A)| = |\rho(I)| \cdot |A|$.

אם ρ מוסיפה כפולה של שורה לשורה אחרת: $|\rho(A)| = |A|$, ומצד שני: $|\rho(I)| \cdot |A| = |I| \cdot |A| = |A|$ ואכן: $|\rho(A)| = |\rho(I)| \cdot |A|$.

כעת, נוכיח את הטענה לכל שתי מטריצות – $|AB| = |A| \cdot |B|$.

אם A לא הפיכה או B לא הפיכה, גם AB לא הפיכה, ואז: $|AB| = |A| \cdot |B| = 0$.

אם A, B הפיכות, אפשר לרשום כל אחת מהן כמכפלה של מטריצות פעולה: $A = \rho_1(I) \cdot \ldots \cdot \rho_k(I), B = \rho_{k+1}(I) \cdot \ldots \cdot \rho_m(I)$, ואז:

$$|AB| = |\rho_1(I) \cdot \ldots \cdot \rho_k(I)\, \rho_{k+1}(I) \cdot \ldots \cdot \rho_m(I)| =$$

$$= |\rho_1(I) \cdot \ldots \cdot \rho_k(I)| \cdot |\rho_{k+1}(I) \cdot \ldots \cdot \rho_m(I)| = |A| \cdot |B|$$

<u>נוסחת לפלס:</u>

אנו מעוניינים בנוסחה לחישוב הדטרמיננטה, כזו שמצד אחד לא תדרוש דירוג ומצד שני לא תדרוש שימוש בתמורות.

ראשית, נציג את הנוסחה וכמה דוגמאות לחישוב. אם A ריבועית מסדר n, אז:

$$|A| = \sum^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |M_{ij}|$$

כאשר M_{ij} הוא המינור ה־ij – המטריצה מסדר $n-1$ המתקבלת מ־A ע"י מחיקת השורה ה־i והעמודה ה־j.

מי רץ בסכום? אפשר לקבוע איזה $1 \le i \le n$ שרוצים, ואז j הוא האינדקס שירוץ בסכום – פיתוח לפי השורה ה־i; אפשר לקבוע איזה $1 \le j \le n$ שרוצים, ואז i הוא האינדקס שירוץ בסכום – פיתוח לפי העמודה ה־j.

למשל:

א. נחשב את הדטרמיננטה של:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

בשני אופנים – לפי השורה הראשונה ולפי העמודה השניה.

לפי השורה הראשונה, $i=1$ ולכן j רץ בסכום, כלומר:

$$|A| = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{1j} |M_{1j}| =$$

$$(-1)^{1+1} a_{11} |M_{11}| + (-1)^{1+2} a_{12} |M_{12}| + (-1)^{1+3} a_{13} |M_{13}| =$$

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$5 \cdot 9 - 8 \cdot 6 - 2(4 \cdot 9 - 7 \cdot 6) + 3(4 \cdot 8 - 7 \cdot 5) = 0$$

לפי העמודה השניה, $j=2$ ולכן i רץ בסכום, כלומר:

$$|A| = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+2} a_{i2} |M_{i2}| =$$

$$(-1)^{1+2}\,a_{12}\left|M_{12}\right|+(-1)^{2+2}\,a_{22}\left|M_{22}\right|+(-1)^{3+2}\,a_{32}\left|M_{32}\right|=$$

$$-2\cdot\begin{vmatrix}4&6\\7&9\end{vmatrix}+5\cdot\begin{vmatrix}1&3\\7&9\end{vmatrix}-8\cdot\begin{vmatrix}1&3\\4&6\end{vmatrix}=$$

$$-2\left(4\cdot9-7\cdot6\right)+5\left(1\cdot9-7\cdot3\right)-8\left(1\cdot6-4\cdot3\right)=0$$

ב. מכיוון שיש לנו את החופש לבחור באיזו שורה/עמודה שנחפוץ, כדאי לבחור את זו שיש בה כמה שיותר אפסים, למשל:

$$\begin{vmatrix}1&0&5&9\\-3&0&1&1\\7&4&3&7\\-2&0&0&0\end{vmatrix}$$

אם מפתחים לפי העמודה השניה או לפי השורה הרביעית, רוב המחוברים יתאפסו, למשל לפי העמודה השניה – $j=2$ ולכן i רץ בסכום:

$$|A|=\sum_{i=1}^{4}(-1)^{i+2}\,a_{i2}\left|M_{i2}\right|$$

אם $i\neq 3$, $a_{i2}=0$ ולכן:

$$|A|=(-1)^{3+2}\,a_{32}\left|M_{32}\right|=-4\cdot\begin{vmatrix}1&5&9\\-3&1&1\\-2&0&0\end{vmatrix}$$

את הדטרמיננטה הזו, נפתח לפי השורה השלישית –

$$=-4\cdot(-1)^{3+1}\,(-2)\cdot\begin{vmatrix}5&9\\1&1\end{vmatrix}=8\left(5\cdot1-1\cdot9\right)=-32$$

כדי להוכיח את הנוסחה, נזדקק לכמה טענות עזר.

טענה:

$|\rho(I)^t| = |\rho(I)|$, כלומר שחלוף מטריצת פעולה לא משנה את הדטרמיננטה.

טענה:

תהי A ריבועית, אזי: $|A^t| = |A|$.

הוכחה:

אם A לא הפיכה, גם A^t לא הפיכה (למשל – שורות A ת"ל ולכן עמודות A^t ת"ל), ולכן: $|A^t| = |A| = 0$.

אם A הפיכה, אפשר לרשום את A כמכפלת מטריצות פעולה: $A = \rho_1(I) \cdot \ldots \cdot \rho_k(I)$, ולכן: $A^t = (\rho_1(I) \cdot \ldots \cdot \rho_k(I))^t = \rho_k(I)^t \cdot \ldots \cdot \rho_1(I)^t$. לכן:

$$|A| = |\rho_1(I) \cdot \ldots \cdot \rho_k(I)| = |\rho_1(I)| \cdot \ldots \cdot |\rho_k(I)| =$$

$$\left|\rho_k(I)^t\right| \cdot \ldots \cdot \left|\rho_1(I)^t\right| = \left|\rho_k(I)^t \cdot \ldots \cdot \rho_1(I)^t\right| = \left|A^t\right|$$

מסקנה:

מכיוון ששורות A הן עמודות A^t, פעולות עמודה (החלפת עמודות, כפל עמודה בסקלר והוספת כפולה של עמודה לעמודה אחרת) משפיעות על הדטרמיננטה כמו פעולות שורה.

טענה:

אם: $R_1(A) = e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$, אזי: $|A| = |M_{11}|$.

הוכחה:

נשתמש בנוסחה הבסיסית:

$$|A|=\sum_{\sigma\in S_n} sign\left(\sigma\right)a_{1\sigma(1)}\dots a_{n\sigma(n)}$$

נשים לב ש: $a_{1j}=0$ אם $j>1$, ו־$a_{11}=1$. לכן, התמורות שעבורן המחוברים לא מתאפסים הן התמורות שמקיימות: $\sigma\left(1\right)=1$. נסמן את קבוצת כל התמורות שמקיימות $\sigma\left(1\right)=1$ ב־S ולכן:

$$|A|=\sum_{\sigma\in S_n} sign\left(\sigma\right)a_{1\sigma(1)}\dots a_{n\sigma(n)}=$$

$$\sum_{\sigma\in S} sign\left(\sigma\right)a_{11}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)}=\sum_{\sigma\in S} sign\left(\sigma\right)a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)}$$

בפועל, אנחנו נשארים עם כל תמורות על הקבוצה $\{2,\dots,n\}$, ומתקיים:

$$M_{11}=\begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

ולכן הסכום: $\sum_{\sigma\in S} sign\left(\sigma\right)a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)}$ מתאר בדיוק את הדטרמיננטה של M_{11}, ואכן: $|M_{11}|=|A|$.

כמו כן, נזכור ש:

$$\begin{vmatrix} -v_1-\\ \vdots\\ -\alpha v_i+u_i-\\ \vdots\\ -v_n-\end{vmatrix}=\alpha\begin{vmatrix} -v_1-\\ \vdots\\ -v_i-\\ \vdots\\ -v_n-\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -v_1-\\ \vdots\\ -u_i-\\ \vdots\\ -v_n-\end{vmatrix}$$

כעת, נוכיח את נכונות הנוסחה.

A ריבועית מסדר n, נסמן:

$$A=\begin{pmatrix} -v_1- \\ \vdots \\ -v_i- \\ \vdots \\ -v_n- \end{pmatrix}$$

נרשום: $v_i=\begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in}\end{pmatrix}$ ואפשר לרשום: $v_i=a_{i1}e_1+\ldots+a_{in}e_n$.

לכן:

$$|A|=\begin{vmatrix} -v_1- \\ \vdots \\ -v_i- \\ \vdots \\ -v_n- \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -v_1- \\ \vdots \\ -a_{i1}e_1+\ldots+a_{in}e_n- \\ \vdots \\ -v_n- \end{vmatrix}=$$

$$=a_{i1}\begin{vmatrix} -v_1- \\ \vdots \\ -e_1- \\ \vdots \\ -v_n- \end{vmatrix}+\ldots+a_{in}\begin{vmatrix} -v_1- \\ \vdots \\ -e_n- \\ \vdots \\ -v_n- \end{vmatrix}$$

בכל דטרמיננטה, נבצע פעולות של החלפת שורה והחלפת עמודה עד שהשורה הראשונה תהיה e_1 ונוכל להשתמש בטענה הקודמת.

נתבונן בדטרמיננטה של:

$$\begin{vmatrix} -v_1- \\ \vdots \\ -e_j- \\ \vdots \\ -v_n- \end{vmatrix}$$

הוקטור e_j מופיע בשורה ה־i. כלומר, בשורה ה־i יש לי 1 במקום ה־j והשאר אפסים. אנחנו רוצים להביא את ה־1 שנמצא במקום ה־ij למקום ה־11, בלי לשנות את הסדר של שאר השורות והעמודות (חוץ מהשורה ה־i והעמודה ה־j), וכך נישאר עם המינור ה־ij. לכן, נבצע את הפעולות: $R_i \leftrightarrow R_{i-1}, R_{i-1} \leftrightarrow R_{i-2}, \ldots, R_2 \leftrightarrow R_1$ וגם: $C_j \leftrightarrow C_{j-1}, C_{j-1} \leftrightarrow C_{j-2}, \ldots, C_2 \leftrightarrow C_1$.

סה"כ, ביצענו $i-1+j-1$ פעולות של החלפה, ולכן הדטרמיננטה מוכפלת ב־$(-1)^{i-1+j-1} = (-1)^{i+j}$.

אחרי שנבצע את הפעולות, נקבל את e_1 בשורה הראשונה, ובמינור ה־11 יופיע המינור ה־ij של המטריצה A, ולכן:

$$\begin{vmatrix} -v_1- \\ \vdots \\ -e_j- \\ \vdots \\ -v_n- \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

ולכן בסה"כ:

$$|A| = a_{i1}\begin{vmatrix} -v_1- \\ \vdots \\ -e_1- \\ \vdots \\ -v_n- \end{vmatrix} + \ldots + a_{in}\begin{vmatrix} -v_1- \\ \vdots \\ -e_n- \\ \vdots \\ -v_n- \end{vmatrix} = \sum a_{ij}\left(-1\right)^{i+j}\left|M_{ij}\right|$$

אפשר לעשות זאת לכל שורה i, אפשר לעשות זאת לכל שורה j ב-A^t, ולכן אפשר לפתח את הדטרמיננטה לפי איזו שורה או עמודה שנבחר.

<u>המטריצה $adjoint$ - המטריצה המצורפת:</u>

תהי A מטריצה ריבועית מסדר n. המטריצה המצורפת של A מסומנת: $adj\left(A\right)$, זו מטריצה ריבועית מסדר n המוגדרת באופן הבא:

$$\left(adj\left(A\right)\right)_{ij} = \left(-1\right)^{i+j}\left|M_{ji}\right|$$

כאשר M_{ji} הוא המינור ה-ji של A.

למשל, נמצא את $adj\left(A\right)$ כאשר:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(adj\left(A\right)\right)_{11} = \left(-1\right)^{1+1}\left|M_{11}\right| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -6$$

$$\left(adj\left(A\right)\right)_{12}=\left(-1\right)^{1+2}\left|M_{21}\right|=-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 7 & 4\end{vmatrix}=7$$

$$\left(adj\left(A\right)\right)_{13}=\left(-1\right)^{1+3}\left|M_{31}\right|=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-2$$

$$\left(adj\left(A\right)\right)_{21}=\left(-1\right)^{2+1}\left|M_{12}\right|=-\begin{vmatrix}0 & 2\\ -3 & 4\end{vmatrix}=-6$$

$$\left(adj\left(A\right)\right)_{22}=\left(-1\right)^{2+2}\left|M_{22}\right|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -3 & 4\end{vmatrix}=7$$

$$\left(adj\left(A\right)\right)_{23}=\left(-1\right)^{2+3}\left|M_{32}\right|=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-2$$

$$\left(adj\left(A\right)\right)_{31}=\left(-1\right)^{1+3}\left|M_{13}\right|=\begin{vmatrix}0 & 2\\ -3 & 7\end{vmatrix}=6$$

$$\left(adj\left(A\right)\right)_{32}=\left(-1\right)^{3+2}\left|M_{23}\right|=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ -3 & 7\end{vmatrix}=-7$$

$$\left(adj\left(A\right)\right)_{33}=\left(-1\right)^{3+3}\left|M_{33}\right|=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2$$

ולכן:

$$adj\left(A\right)=\begin{pmatrix}-6 & 7 & -2\\ -6 & 7 & -2\\ 6 & -7 & 2\end{pmatrix}$$

<u>משפט:</u>

לכל A מתקיים:

$$A \cdot adj\,(A) = adj\,(A) \cdot A = |A| \cdot I$$

לכן, אם A לא הפיכה, אז: $|A| = 0$ ואז: $A \cdot adj\,(A) = adj\,(A) \cdot A = 0$.

אם A הפיכה, מכיוון ש: $|A| \neq 0$, נקבל ש:

$$\frac{1}{|A|} adj\,(A) \cdot A = I \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\,(A)$$

ואפשר לחשב את ההופכית בלי לדרג בכלל – לחשב הרבה מכפלות וסכומים במקום.

<u>תכונות:</u>

1. מהי $|adj\,(A)|$?

אם $A = 0$, אז: $adj\,(A) = 0$ ולכן גם: $|adj\,(A)| = 0$.

אם $A \neq 0$ אך לא הפיכה, מכיוון ש: $adj\,(A) \cdot A = 0$ אז $adj\,(A)$ מחלקת אפס ולכן לא הפיכה, כלומר: $|adj\,(A)| = 0$.

אם A הפיכה, אז: $adj\,(A) \cdot A = |A| \cdot I$, ולכן: $|adj\,(A) \cdot A| = ||A| \cdot I|$.

נניח שהסדר של A הוא n, ולכן:

$$|adj\,(A)| \cdot |A| = |adj\,(A) \cdot A| = ||A| \cdot I| = |A|^n \cdot |I| = |A|^n$$

מכיוון ש־A הפיכה, $|A| \neq 0$; אפשר לצמצם ולקבל: $|adj\,(A)| = |A|^{n-1}$.

תכלס, גם כש־A לא הפיכה, מתקיים: $|adj\,(A)| = |A|^{n-1} = 0$, ולכן אפשר לומר שלכל A: $|adj\,(A)| = |A|^{n-1}$.

2. סיכום של תכונות הדטרמיננטה:

א. $|AB|=|A|\cdot|B|$.

ב. $|A^n|=|A\cdot A\cdot\ldots\cdot A|=|A|\cdot\ldots\cdot|A|=|A|^n$.

ג. $|A|\cdot|A^{-1}|=|AA^{-1}|=|I|=1$ ולכן: $|A|^{-1}=\frac{1}{|A|}=|A^{-1}|$. לכן, אפשר לסכם ש: $|A^n|=|A|^n$ לכל $n\in\mathbb{Z}$.

ד. $|\alpha A|=\alpha^n|A|$, כאשר n הוא הסדר של המטריצה.

ה. $|A^t|=|A|$.

3. אפשר לשאול – מהי $adj\left(adj\left(A\right)\right)$ או מהי $|adj\left(adj\left(A\right)\right)|$...

4. אפשר לשאול – אם A,B ריבועיות מאותו סדר, אז: $adj\left(AB\right)=adj\left(A\right)adj\left(B\right)$. מתקיים: $ABadj\left(AB\right)=|AB|\cdot I$, ואפשר לחלק למקרים – מה קורה כשאחת מהמטריצות לא הפיכה, מה קורה כשהן כן הפיכות...

הוכחת המשפט:

נוכיח ש: $A\cdot adj\left(A\right)=|A|\cdot I$, ההוכחה של: $adj\left(A\right)\cdot A=|A|\cdot I$ דומה.

אם כן, נראה ש: $\left(A\cdot adj\left(A\right)\right)_{ij}=\left(|A|\cdot I\right)_{ij}$ לכל $1\le i,j\le n$.

אם $i=j$ – מצד אחד, $\left(|A|\cdot I\right)_{ij}=|A|$). מצד שני:

$$\left(A\cdot adj\left(A\right)\right)_{ij}=\left(A\cdot adj\left(A\right)\right)_{ii}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\left(adj\left(A\right)\right)_{ki}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\left(-1\right)^{k+i}|M_{ik}|=|A|$$

והאיברים אכן שווים.

אם $i \neq j$ – מצד אחד, $(|A| \cdot I)_{ij} = 0$. מצד שני:

$$(A \cdot adj\,(A))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(adj\,(A)\right)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (-1)^{k+j} |M_{jk}|$$

הסכום מתאר דטרמיננטה, אבל של מטריצה שבה השורה ה־i היא השורה ה־j של A, ושאר השורות זהות ל־A. אם כן, זו דטרמיננטה של מטריצה שבה יש שתי שורות זהות (ה־i וה־j), ולכן היא שווה ל־0, כנדרש.

סה"כ, בכל מקרה קיבלנו שאכן: $(A \cdot adj\,(A))_{ij} = (|A| \cdot I)_{ij}$ והמטריצות אכן זהות.

<u>כלל קרמר:</u>

למערכת $Ax = b$ יש פתרון יחיד אם ורק אם A הפיכה (כאשר A ריבועית).

במילים אחרות, אם ורק אם $|A| \neq 0$.

במצב כזה, כלל קרמר מאפשר לנו למצוא את הפתרונות: $x = (x_1, \ldots, x_n)$ באופן הבא:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

כאשר A_i היא המטריצה המתקבלת מ־A ע"י החלפת העמודה ה־i ב־b (כלומר: $C_i\,(A_i) = b$, ולכל $j \neq i$: $C_j\,(A_i) = C_j\,(A)$).

לדוגמה: נפתור את המערכת:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = -5 \\ 7x + 8y + 8z = 9 \end{cases}$$

כאן:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}, x = (x, y, z)$$

ראשית:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -13 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) \cdot (-1) = 3$$

כעת:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 5 & 6 \\ 9 & 8 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 15 & 21 \\ 0 & -10 & -19 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 15 & 21 \\ -10 & -19 \end{vmatrix} = 15\,(-19) - (-10) \cdot 21 = -75$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 7 & 9 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -9 & -6 \\ 0 & 2 & -13 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -9 & -6 \\ 2 & -13 \end{vmatrix} = 9 \cdot 13 - 2\,(-6) = 129$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & -6 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 20 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) \cdot 20 = -60$$

ולכן:

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-75}{3} = -25$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{129}{3} = 43$$

$$z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-60}{3} = -20$$

וסה"כ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -25 \\ 43 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

אבל למה? מה היתרון של קרמר על פני דירוג? אפשר להשתמש בקרמר מבלי להשתמש בדירוג בכלל – לחשב את הדטרמיננטות באמצעות לפלס. השאלה היא האם יש יתרון לשיטה הזו? קרמר לא דורש חשיבה בכלל; בקרמר אפשר

למצוא רק חלק מהמשתנים בלי למצוא את השאר.