תרגיל 2

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x-1}-\sqrt{x}$

ב. $b_n=-2\cdot n^5+3\cdot n^4-3\cdot n^3+n-2$

2. הוכיחו/הפריכו:

א. יהיו סדרות a_n ו- b_n כך ש: $b_n\to 0$ וגם $\frac{a_n}{b_n}\to 0$. אזי $a_n\to 0$

ב. סדרה a_n מתכנסת לגבול סופי כך שלכל n מתקיים : $a_n>L$ אזי $\lim_{x\to\infty}a_n>L$.

3. חשוב את הגבול של הסדר הבאה:

$$a_n=\frac{1}{n}((8+\frac{1}{n})^2+(8+\frac{2}{n})^2+\cdots\cdots+(8+\frac{n}{n})^2)$$

<u>הדרכה</u>: נפתח את הסוגריים הפנימיים ונקבל:

$$a_n=\frac{1}{n}(8^2\cdot n+2\cdot 8\cdot(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n})+(\frac{1^2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}^2))$$

נזכר בזהויות הבאות ונשתמש בהם:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ונשתמש בהם כדי לפשט את הביטוי.

4. תהי a_n סדרה המתכנסת לגבול ממשי $L\in\mathbb{R}$. תהי b_n סדרה חסומה שאינה מתכנסת.
הוכיחו: $c_n=a_n\cdot b_n$ מתכנסת אם ורק אם $L=0$.

5. תהיינה שתי סדרות, a_n , b_n כך ש: $\lim_{x\to\infty}a_n\to\infty$ ו a_n+b_n סדרה חסומה. מצא את $\lim_{x\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$.

הדרכה: נזכור שאם $a_n\to\infty$ אז $\frac{1}{a_n}\to 0$.

מתקיים: $\lim_{x\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{x\to\infty}(\frac{b_n+a_n}{a_n}-\frac{a_n}{a_n})$. ולכן לפי אריתמטיקה של גבולות, אפשר לחשב את הגבול...

6. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to\infty}\frac{5n+1}{3-8n^3}$

ב. $\lim_{x\to\infty}\frac{n+1}{3n-1}$

בהצלחה!