פתרון - חדו"א 1 לאודיסאה – 86-147 – בוחן ראשון – 28.11.22

1. (37 נק') לכל הערכים של הפרמטרים $a,b\in\mathbb{R}$ חשבו את הגבולות של הסדרות הבאות:

א. $\sqrt{(n-a)(n-b)}-n$

$$\sqrt{(n-a)(n-b)}-n=\sqrt{n^2-(a+b)n+ab}-n=\frac{n^2-(a+b)n+ab-n^2}{\sqrt{n^2-(a+b)n+ab}+n}=$$

$$=\frac{n\left(-(a+b)+\frac{ab}{n}\right)}{\sqrt{n^2\left(1-\frac{a+b}{n}+\frac{ab}{n^2}\right)}+n}=\frac{n\left(-(a+b)+\frac{ab}{n}\right)}{n\sqrt{1-\frac{a+b}{n}+\frac{ab}{n^2}}+n}=\frac{-(a+b)+\frac{ab}{n}}{\sqrt{1-\frac{a+b}{n}+\frac{ab}{n^2}}+1}\to-\frac{a+b}{2}$$

ב. $\left(\frac{n+a}{n-a}\right)^{bn}$

ראשית נוודא כי בסיס החזקה שואף ל1, ולכן מותר להשתמש בכלל הe

$$\frac{n+a}{n-a}=\frac{n}{n}\cdot\frac{1+\frac{a}{n}}{1-\frac{a}{n}}\to 1$$

כעת לפי כלל הe

$$\left(\frac{n+a}{n-a}\right)^{bn}\to e^{\lim bn\cdot\left(\frac{n+a}{n-a}-1\right)}=e^{\lim bn\cdot\frac{2a}{n-a}}=e^{\lim\frac{n}{n}\cdot\frac{2ab}{1-\frac{a}{n}}}=e^{2ab}$$

2. (37 נק') נביט בקבוצה $A=\left\{\frac{n+1}{n^2+1}\middle|n\in\mathbb{N}\right\}$.

א. מצאו את החסם העליון $\sup(A)$, הוכיחו כי זה אכן החסם העליון.

ראשית עבור $n=1$ נקבל כי $A\ni\frac{1+1}{1^2+1}=1$.

נוכיח כי מדובר בחסם מלעיל של הקבוצה, ויחד עם העובדה שהוא שייך לקבוצה נובע כי הוא המקסימום של הקבוצה ולכן גם החסם העליון.

יהי $n\in\mathbb{N}$, צ"ל כי $1\le\frac{n+1}{n^2+1}$.

נפתח את אי השיוויון:

$$n + 1 \leq n^2 + 1$$

$$n \leq n^2$$

זה כמובן נכון לכל המספרים הטבעיים.

ב. מצאו את החסם התחתון $\inf(A)$, הוכיחו כי זה אכן החסם התחתון.

רמז: העזרו בעובדות כי $n + 1 \leq n + n$ וכן $n^2 + 1 > n^2$.

ננחש כי אפס הוא החסם התחתון, ונוכיח זאת.

ראשית עלינו להוכיח כי אפס חסם מלרע. אכן לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי

$$\frac{n+1}{n^2+1} > 0$$

כיוון שמדובר במספרים חיוביים.

כעת, יהי $\varepsilon > 0$ צ"ל שקיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש

$$\frac{n+1}{n^2+1} < 0 + \varepsilon$$

כעת נעזר ברמז:

$$\frac{n+1}{n^2+1} < \frac{n+n}{n^2} = \frac{2}{n}$$

לכן מספיק להוכיח כי קיים $n \in \mathbb{N}$ עבורו $\frac{2}{n} < \varepsilon$ כלומר $n > \frac{2}{\varepsilon}$

זה ברור (תכונת ארכימדס – לכל ממשי יש טבעי גדול ממנו).

3. (37 נק') יהי $0 < L \in \mathbb{R}$ ותהי סדרה מתכנסת $a_n \to L$.

הוכיחו את הטענות הבאות באמצעות הגדרת הגבול (ללא משפטי חשבון גבולות):

א. $a_n^2 \to L^2$.

יהי $\varepsilon > 0$ צריך למצוא N עבורו לכל $n > N$ מתקיים כי

$$|a_n^2 - L^2| < \varepsilon$$

כעת

$$a_n^2 - L^2 = (a_n - L)(a_n + L)$$

כיוון ש $a_n \to L$ קיים N_1 שאחריו

$$\frac{L}{2} < a_n < \frac{3L}{2}$$

ולכן אחרי N_1

$$a_n + L < \frac{3L}{2} + L = \frac{5L}{2}$$

(הערה: במקום החלק האחרון, אפשר היה להשתמש במשפט לפיו סדרה המתכנסת לגבול סופי היא חסומה)

לכן אחרי N_1 מתקיים כי

$$|a_n^2 - L^2| = |a_n - L| \cdot |a_n + L| \leq |a_n - L| \cdot \frac{5L}{2}$$

אנחנו רוצים שזה יהיה קטן מε, ולכן נרצה כי $|a_n - L| < \frac{2\varepsilon}{5L}$

אכן, כיוון ש $a_n \to L$ קיים N_2 אחריו

$$|a_n - L| < \frac{2\varepsilon}{5L}$$

סה"כ נבחן $N = \max\{N_1, N_2\}$ ולכל $n > N$ מתקבל כי

$$|a_n^2 - L^2| < \varepsilon$$

ב. $\sqrt{a_n} \to \sqrt{L}$.

יהי $\varepsilon > 0$ צריך למצוא N עבורו לכל $n > N$ מתקיים כי

$$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{L}\right| < \varepsilon$$

מי מבטיח שהשורש מוגדר כלל? כלומר כי הסדרה חיובית?

כיוון ש $a_n \to L$ קיים N_1 שאחריו $\frac{L}{2} < a_n$ ולכן הסדרה חיובית.

הערה: לא הייתי מוריד יותר מנקודה למי שפספס את הצורך להראות שהסדרה בכלל מוגדרת.

כעת נכפול ונחלק בצמוד

$$\left|\sqrt{a_n}-\sqrt{L}\right| = \left|\frac{a_n - L}{\sqrt{a_n}+\sqrt{L}}\right| \le \frac{|a_n - L|}{\sqrt{L}}$$

אנחנו רוצים שזה יהיה קטן מε, כלומר אנחנו רוצים כי $|a_n - L| < \sqrt{L}\cdot\varepsilon$

כיוון ש $a_n \to L$ קיים N_2 אחריו $|a_n - L| < \sqrt{L}\cdot\varepsilon$

סה"כ נבחן $N = \max\{N_1, N_2\}$ ולכל $n > N$ מתקבל כי

$$\left|\sqrt{a_n}-\sqrt{L}\right| < \varepsilon$$