משפט הפונקציות הסתומות(למערכת משוואות)

$$F:\Omega\subseteq\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}^s$$

(Ω קבוצה פתוחה) רציפה בסביבה של $\left(x^0,y^0\right)$ בΩ.

$$F\left(x^0,y^0\right)=0,\quad \left.\frac{\partial\left(F_1,...F_s\right)}{\partial\left(y_1,...y_s\right)}\right|_{\left(x^0,y^0\right)}\neq 0$$

אזי קיימת $a',b'>0$ ופונקציה יחידה $y=\varphi(x)$ $\varphi:I\to\mathbb{R}^s$ המוגדרת בתא $I=\left\{x\in\mathbb{R}^k\middle|\left|x_i-x_i^0\right|\le a'\right\}$ כך ש$\|\varphi\|\le b'$ ו$F\left(x,\varphi(x)\right)=0$ עבור כל $x\in I$. φ רציפה בI. $\varphi\left(x^0\right)=y^0$.

תוספת: משפט

אם נחזק את ההנחה לגבי F ונניח שF היא ממח' C^1 לגבי כל המשתנים(גם הxים!), גם הפתרון φ גם הוא ממח' C^1(מקומית), והנוסחא נכונה עבור $\frac{\partial\varphi_r}{\partial x_i}$ בסביבה:

$$\forall i=1,...k,\forall r=1,...s$$

$$\frac{\partial\varphi_r}{\partial x_i}=-\frac{J_i}{J}$$

כאשר $J=\frac{\partial\left(F_1,...F_s\right)}{\partial\left(y_1,...y_s\right)}$ היעקוביאן וJ_i הוא הדטרמיננטה המתקבלת מJ ע"י החלפת y_i בx_i בעמודה הrית:

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1} & ... & \frac{\partial F_r}{\partial y_i} & | & ... & \frac{\partial F_s}{\partial F_s}\\ \vdots & & \vdots & | & & \\ \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & & \frac{\partial F_r}{\partial y_i} & | & & \frac{\partial F_s}{\partial y_s}\end{vmatrix}$$

הוכחה חלקית

1. הפתרון φ ממח' C^1 בסביבה של $\left(x^0,y^0\right)$(נדלג על ההוכחה)

2. $F(x,\varphi(x))=0$ בסביבה של $\left(x^0,y^0\right)$.
F היא C^1, ו־φ היא C^1.
לכן כלל השרשרת נכון עבור הפונ' המורכבת הנ"ל בסביבה.
נגזור לפי $x_i(\forall i)$

$$F_r\left(x_1,...x_k;\varphi_1\left(x_1,...x_k\right),...\varphi_s\left(x_1,...x_k\right)\right)=0\quad\forall r=1,...s$$

$$\frac{\partial F_r}{\partial x_i}\cdot 1+\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial F_r}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}=0$$

(נגזרת לפי x_i של הפונקציות $\left(y_j\equiv\varphi_j\left(x\right)\right)$)

$$\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial F_r}{\partial y_j}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}=-\frac{mpF_r}{\partial x_i}$$

$1\le r\le s$, יש s משוואות לינאריות עבור s הנעלמים $\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i},...\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_i}$ (i קבוע בין 1 ל־k)

דטרמיננטת המקדמים היא $\frac{\partial\left(F_1,...F_s\right)}{\partial\left(y_1,...y_s\right)}$ (היעבוביאן), שונה מ־0 בנק' $\left(x^0,y^0\right)$,
היא סכום מכפלות של הנגזרות $\frac{\partial F_r}{\partial y_j}$ הרציפות בסביבה. גם היעקוביאן J הנ"ל רציף בסביבה, וכיוון שהוא $\neq 0$ ב־$\left(x^0,y^0\right)$ הרי $J\neq 0$ בסביבה מסויימת של $\left(x^0,y^0\right)$.
הפתרון של מערכת המשוואות ניתן אז ע"י נוסחת קרמר

$$\frac{\partial\varphi_r}{\partial x_i}=\frac{\begin{vmatrix}\cdots & -\frac{\partial F_r}{\partial y_i} & \cdots\end{vmatrix}}{J}=-\frac{J_i}{J}$$

דוגמה

$$r=2,s=2$$

$$\begin{array}{c}F_1\\F_2\end{array}\left\{\begin{array}{l}x^2+y^2-z^2-u^2=0\\x^3+y^3-z^3+u^3=0\end{array}\right.$$

C^1 בכל המרחב(כי פולינום).

$$\underline{F}=(F_1,F_2)$$

$$\underline{x}=(x,y)$$

$$\underline{y}=(z,u)$$

$$\underline{F}\left(\underline{0},\underline{0}\right)=\underline{0}$$

$$\frac{\partial\left(F_1,F_2\right)}{\partial\left(z,u\right)}=\begin{vmatrix}-2z & -3z^2\\ 2u & 3u^2\end{vmatrix}=6\left(z^2u-zu^2\right)=6zu\left(z-y\right)\neq 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix}2x & 2u\\ 3x^2 & 3u^2\end{vmatrix}}{6zu\left(z-u\right)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xu^2-x^2u}{zu\left(z-u\right)}=\frac{xu-x^2}{z\left(z-u\right)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{x^2-x}{z\left(z-u\right)}$$

$$J_1=\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

$$y=\sqrt{r^2-x^2}=\varphi$$

$$\varphi'\left(x\right)=-\frac{x}{y}$$

משפט ההעתקה ההפוכה

תהי $f:\Omega\subset\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ (Ω פתוחה) ממח' C^1, ונניח שבנקודה מסויימת $x^0\in\Omega$ מתקיים $\left.\frac{\partial\left(f_1,...f_k\right)}{\partial\left(x_1,...x_k\right)}\right|_{x^0}\neq 0$. אזי קיימות סביבות U של x^0 וV של $y^0\doteqdot f\left(x^0\right)$ כך שלכל $y\in V$ קיים x יחיד בV שעבורו $y=f\left(x\right)$(כלומר f חח"ע של U על V), והפונקציה ההפוכה(הקיימת בהכרח מV לU) היא ג"כ ממח' C^1.

הוכחה

נגדיר $F:\Omega\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ ע"י $F\left(x^{\in\Omega},y^{\in\mathbb{R}^k}\right)=f(x)-y$

לפי ההגדרה:

$$F\left(x^0,y^0\right)=f\left(x^0\right)-y^0=0$$

לפי נתון:

$$\left.\frac{\partial(F_1,...F_k)}{\partial(x_i,...x_k)}\right|_{(x^0,y^0)}=\left.\frac{\partial(f_1,...f_k)}{\partial(x_1,...x_k)}\right|_{x^0}\neq 0$$

לפי משפט הפונקציות הסתומות למערכת משוואות, קיים פתרון יחיד מקומי עבור הנעלם x כפונקציה של y. כלומר: יש סביבה U של x^0 וסביבה V של y^0 כך שלכל y בV יש x יחיד בU הפותר את המשוואה $F(x,y)=0$ ($\doteqdot f(x)-y$). ז"א, כך ש$y=f(x)$, ולפי התוספת למשפט הפונקציות הסתומות, הפתרון הוא C^1 (שהרי F היא ממ"ח C^1 לפי כל משתניה).

נקודות קיצון עם אילוצים

בעיה: מצא נקודות קיצון עבור $F:\Omega\subseteq\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}$ עם אילוץ $G(x,y)=0$ במקום ש$G:\Omega\to\mathbb{R}^s$.

עקרונית, בשיטת החילוץ מוצאים את נקודות הקיצון של הפונקציה המורכבת $F(x,\varphi(x))$

שיטת כופלי לגדרנז'

משפט

תהי $F:\Omega^{\subseteq\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^S}\to\mathbb{R}$ ממח' C^1, ונניח:

א) $G\left(x^0,y^0\right)=0$

ב) $\left.\frac{\partial(G_1,...G_s)}{\partial(y_1,...y_s)}\right|_{(x^0,y^0)}\neq 0$

ג) $\left(x^0,y^0\right)$ היא נק' קיצון של הפונ' F תחת האילוץ $G\left(x^0,y^0\right)=0$.
(דהיינו $\left(x^0,y^0\right)$ היא נק' קיצון מקומית של הפונ' המורכבת $F(x,\varphi(x))$ כאשר $y=\varphi(x)$ פתרון מקומי של האילוץ, ו$y^0=\varphi\left(x^0\right)$)

אזי: קיים וקטור $c=(c_1,...c_s)$ קבוע כך ש

$$\boxed{\nabla(F-c\cdot G)=0}$$

($c\cdot G=\sum c_jG_j$)

c_j נקראים כופלי לגרנז'.