בס"ד

פתרון מועד א' בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

קורס מס' 83114 תשע"ז, סמסטר ב'

שאלה 1.

א. קבע היכן וכיצד טור הפונקציות: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ מתכנס (נקודתית, בהחלט או בתנאי, במידה שווה).

ב. חשב את סכום הטור: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n\left(n+1\right)}$.

פתרון:

א. זהו טור חזקות עם ר"ה 1. נבדוק בקצוות: בנקודה $x=-1$ זהו טור לייבניץ שמתכנס בתנאי ובנקודה $x=1$ הטור חבר של הטור ההרמוני המתבדר. לכן ישנה התכנסות נקודתית בקטע $\left[-1,1\right)$, בהחלט לכל $|x|<1$ ובמ"ש בכל קטע סגור המוכל ב-$\left[-1,1\right)$ (משפט).

ב. נכתוב: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n\left(n+1\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}\Big|_{x=\frac{1}{2}}$. הטור $\sum_{n=0}^{\infty}t^n$ מתכנס במ"ש בקטע $\left[0,x\right]$ לכל $0<x<1$ לכן:

$$\forall 0<x<1:\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n\,dt=\frac{1}{x}\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^n\right)dt=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{dt}{1-t}=\frac{-\ln|1-x|}{x}$$

ובפרט עבור $x=\frac{1}{2}$ מתקבל סכום טור המספרים הנ"ל: $2\ln 2$.

שאלה 2. קבע עבור הפונקציה: $f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{x\sin y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ 0 & \left(x,y\right)=\left(0,0\right)\end{cases}$:

א. האם היא רציפה בראשית?
ב. האם היא דיפרנציאבילית בראשית ?

פתרון:

א. את הרציפות בראשית נסיק ע"י כלל הסנדוויץ': $0\le\left|\frac{x\sin y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\cdot|\sin y|\le|\sin y|\xrightarrow{y\to 0}0$.

ב. לגבי דיפ' בראשית, נחשב את הנ"ח שם: $f_x\left(0,0\right)=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0,\ f_y\left(0,0\right)=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$ ונותר לבדוק האם: $\varepsilon=\frac{f\left(\Delta x=x,\Delta y=y\right)-0}{\rho}=\frac{x\sin y}{x^2+y^2}\xrightarrow[y\to 0]{x\to 0}0$? התשובה לכך היא שלילית: למשל אם נתקרב לראשית דרך המסלול $x=y$ נקבל: $\frac{x\sin x}{2x^2}=\frac{\sin x}{2x}\xrightarrow{x\to 0}\frac{1}{2}\neq 0$, כלומר f אינה דיפ' בראשית.

שאלה 3. על קופסא בצורת מנסרה ישרה, הפתוחה מלמעלה, להיות בעלת נפח של 32 סמ"ק.

מה צריכים להיות מימדיה של הקופסא כדי ששטח המעטפת שלה יהיה מינימאלי / מקסימאלי ?

פתרון:

נמקם קודקוד אחד של המנסרה בראשית ונגדיר את אורכה להיות x, רוחבה y וגובהה z. הפונקציה שאותה אנו צריכים למזער או למקסם היא: $f(x,y,z)=xy+2yz+2xz$ תחת האילוץ: $g(x,y,z)=xyz-32=0$. נבנה את פונקצית לגרנז': $L_\lambda(x,y,z)=xy+2yz+2xz-\lambda(xyz-32)$ וממנה נגזור מערכת המשוואות למציאת נק' קריטית: $\begin{cases} L_x=y+2z-\lambda yz=0 \\ L_y=x+2z-\lambda xz=0 \\ L_z=2y+2x-\lambda xy=0 \\ L_\lambda=32-xyz=0 \end{cases}$. המערכת נותנת את השוויון: $\lambda=\frac{y+2z}{yz}=\frac{x+2z}{xz}=\frac{2y+2x}{xy}$.

ע"י הבאת כל מכנה ל- xyz והתחשבות באילוץ נקבל: $\frac{xy+2xz}{32}=\frac{xy+2yz}{32}=\frac{2yz+2xz}{32}$ ובמילים אחרות:

$xy+2xz=xy+2yz=2yz+2xz$ כלומר: $x=y=2z$ (המימדים גדולים מ-0). מכאן נקבל פתרון $P=(4,4,2)$ בס"מ. תחום האילוץ $xyz=32$ אינו קומפקטי, לכן אנחנו לא אמורים לצפות בהכרח לקיומם של ערכי קיצון מוחלטים. אכן, ככל ש- x ישאף לאפס, שטח המעטפת ישאף לאינסוף. אבל <u>מינימום</u> מוחלט חייב להיות שכן השטח חסום מלרע ע"י אפס ומצד שני ברור שהשטח לא יכול להיות קטן כרצוננו. לכן כיוון שהמשטח הוא חלק וקיבלנו רק נק' קריטית אחת, זו חייבת להיות מינימום מוחלט.

אפשר גם ע"י חישוב ההסיאן של L_λ בנקודה P: $L_{xx}=L_{yy}=L_{zz}=0,\ L_{xy}(P)=-1,\ L_{yz}(P)=L_{xz}(P)=-2$

כלומר: $HL_\lambda(P)=-\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&2\\2&2&0\end{pmatrix}$ ומכאן: $d^2f(\Delta x,\Delta y,\Delta z)=-4(\Delta x\Delta z+\Delta y\Delta z)-2\Delta x\Delta y=-4\Delta z(\Delta x+\Delta y)-2\Delta x\Delta y$.

לכאורה זה אוכף, אבל על האילוץ החלק: $xyz-32=0$ מתקיים בקירוב ליניארי:

$$0=g(x,y)-g(x_0,y_0)\approx d^1g(\Delta x,\Delta y,\Delta z)_{(P)}=\Delta xyz+\Delta yxz+\Delta zxy\big|_{(4,4,2)}$$
$$=8\Delta x+8\Delta y+16\Delta z\ \Rightarrow\ \Delta z\approx-\frac{1}{2}(\Delta x+\Delta y)$$

לכן בסה"כ: $d^2f(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\approx 2(\Delta x+\Delta y)^2-2\Delta x\Delta y=(\Delta x+\Delta y)^2+\Delta x^2+\Delta y^2>0$

כלומר P היא מינימום מקומי. אבל היא מינימום יחידה וכאמור השטח חסום ע"י אפס, לכן גם מינימום מוחלט.

שאלה 4.

א. נתון משטח: $S=\{(x,y,z):F(x,y,z)=0\}$ באשר $F\in C^1(\mathbb{R}^3)$.

הראה כי אם $F_z\neq 0$ ב- S אזי: $dS=\frac{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}{|F_z|}dxdy$.

ב. חשב את המסה M של משטח המעטפת S של חציו העליון של כדור ברדיוס R שמרכזו בראשית, בעל צפיפות מסה z.

פתרון:

א. כיוון ש: $F_z \neq 0$ לאורך המשטח ויש ל- F נ"ח רציפות שם, עפ"י משפט הפונקציות הסתומות קיימת פונקציה $z = f(x,y)$ בסביבה של כל נקודה, כך ש: $F(x,y,f(x,y)) = 0$ שם, כלומר שהגרף שלה יתלכד עם המשטח. לכן: $dS = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy$ וגם מתקיים בכל נקודה: $f_x = -\frac{F_x}{F_z},\ f_y = -\frac{F_y}{F_z}$ ומכאן מתקבלת התוצאה הרצויה.

ב. באמצעות הצגת המשטח S ע"י הפונקציה: $z = f(x,y) = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$ ניתן להטיל אותו על $D = \left\{x^2+y^2 \le R^2\right\}$ במישור x,y עם גורם ההטלה: $\frac{R}{z} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}$.

לכן המסה שמתקבלת היא: $M = \iint\limits_S z\,dS = \iint\limits_D \frac{R}{z}\cdot z\,dxdy = R\iint\limits_D dxdy = \pi R^3$.

שאלה 5.

א. על משטח הנתון ע"י $z = f(x,y) \in C^1(D)$ נתון קו גובה בצורה פרמטרית: $r(t) = (x(t),y(t)),\ a \le t \le b$.

הראה כי: $\nabla f_{r(t)} \perp r'(t)\ :\ \forall a<t<b$.

ב. חשב את: $\oint\limits_L (y-z)dx + xdy + (x-y)dz$ באשר העקום L הוא חיתוך המשטחים: $\begin{matrix} z = x^2+y^2 \\ z = x+y \end{matrix}$

בכיוון הטריגונומטרי = נגד כיוון השעון (כשמסתכלים מלמעלה).

פתרון:

א. קו הגובה $r(t)$ מאופיין בקבוע c כך ש: $f(r(t)) = c\ :\ \forall a<t<b$. בנוסף, f דיפנציאבילית ב-D (נתון שיש לה נ"ח רציפות שם, משפט) לכן מתקיים: $\forall a<t<b:\ 0 = f(r(t))' = \nabla f_{r(t)} \bullet r'(t)$ ומכאן התוצאה.

ב. ניעזר במשפט סטוקס עבור השדה: $A = (y-z, x, x-y)$ הפועל על המישור $z = x+y$:

$$\oint\limits_{L=\partial S} A \bullet dr = \iint\limits_S (\nabla \times A) \bullet \hat{n}\,dS = \frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_S (-1,-2,0)\bullet(-1,-1,1)\,dxdy = \sqrt{3}\iint\limits_S dS.$$

כעת נטיל את S שהוא חלק ממישור $z = x+y$ על התחום:

$$D = \left\{x^2+y^2 = x+y\right\} = \left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}$$ במישור x,y

עם גורם הטלה $\sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$ ונקבל בסה"כ: $\oint\limits_{L=\partial S} A \bullet dr = \sqrt{3}\iint\limits_S dS = 3\iint\limits_D dxdy = \frac{3\pi}{2}$.