תרגיל 1 - פתרון

שאלה 1

1) הטענה נכונה. נוכיח זאת:

f גזירה ב-a ולכן, עבור $\varepsilon=1$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל x עבורו: $|x-a|<\delta$ מתקיים $|f(x)-f(a)|<1$

שכן: f גזירה ב a $\Leftarrow$ f רציפה ב a.

העובדה שלכל x בקטע $(a-\delta,a+\delta)$ מתקיים $f(a)-1 < f(x) < f(a)+1$

ולכן f חסומה בסביבת δ של a.

2) הטענה אינה נכונה. דוגמא נגדית:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x \text{ רציונלי} \\ -x^2 & x \text{ אי-רציונלי}\end{cases} \quad , \quad a=0$$

נוכיח כי f גזירה ב a:

נחשב גבול זה: $\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(h)-f(0)}{h}\right|$.

$$(*) \quad \lim_{h\to 0}\left|\frac{f(h)-f(0)}{h}\right| = \lim_{h\to 0}\frac{|f(h)|}{|h|} \underset{\uparrow}{=} \lim_{h\to 0}\frac{h^2}{|h|} = \lim_{h\to 0}|h| = 0$$

$|f(x)|=x^2$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

עתה, לכל $h\neq 0$:

$$0 \underset{(*)\text{עפ"י}}{\xleftarrow{h\to 0}} -\left|\frac{f(h)-f(0)}{h}\right| \leq \frac{f(h)-f(0)}{h} \leq \left|\frac{f(h)-f(0)}{h}\right| \underset{(*)\text{עפ"י}}{\xrightarrow{h\to 0}} 0$$

לכן, עפ"י כלל הסנדוויץ' מתקיים $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=0$

ו- f גזירה ב-a. (בפרט רציפה ב a)

אולם : f רציפה ב $a=0$ בלבד.

(ההוכחה דומה להוכחה שפונקצית דיריכלה אינה רציפה באף נקודה).

לכן, לא קיימת סביבה של $a=0$ שבה f רציפה

<u>שאלה 2</u>

1) הטענה אינה נכונה. נראה שלא קיים הגבול:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

נתבונן בסדרות: $x_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$$y_n=\frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi n}$$

שתיהן שואפות לאפס כאשר n שואף לאינסוף, ושונות מאפס.

אולם $\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=1$

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{y_n}=-1$$

ולכן הגבול לא קיים (לפי היינה גבול) ולכן הפונקציה f אינה גזירה ב- $x=0$.

2) הטענה נכונה. נבדוק גזירות ב $x=0$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h|h|-0}{h}=\lim_{h\to 0}|h|=0$$

לכן: גזירה ב $x=0$ ו- $f'(0)=0$.

3) הטענה נכונה. נוכיח זאת:

עבור $n=1$:
$$f(x)=\begin{cases}x+1 & x\geq -1\\ -(x+1) & x<-1\end{cases}$$

נסמן: $f_1(x)=x+1$, ו- $f_2(x)=-(x+1)$,

$f_1(-1)=0=f_2(-1)$

f_1 ו- f_2 גזירות ב $\mathbb{R}$,

אך: $f_1'(x)=1$; $f_2'(x)=-1$.

ולכן: $f_1'(-1)\neq f_2'(-1)$.

אולם:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f_1(-1+h)-f_1(-1)}{h}=f_1'(-1)$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f_2(-1+h)-f_2(-1)}{h}=f_2'(-1)$$

ולכן הגבול: $$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

לא קיים, כלומר f לא גזירה ב $x=-1$,

ולכן f אינה גזירה בכל $\mathbb{R}$.

עבור $n \geq 2$:

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^n & x \geq -1 \\ [-(x+1)]^n & x < -1 \end{cases}$$

נסמן $f_1(x) = (x+1)^n$ ו- $f_2(x) = (-x-1)^n$.

אזי: $f_1(-1) = f_2(-1)$, וכן:

$$f_1'(x) = n(x+1)^{n-1}$$
$$f_2'(x) = n(-x-1)^n(-1) \qquad (*)$$

לכל $x > -1$ $\quad f' = f_1'$

ולכל $x < -1$ $\quad f' = f_2'$

ולכן f גזירה לכל $x \neq -1$.

נותר לבדוק את שיוויון הנגזרות f_1' ו- f_2' בנקודה $x = -1$, כלומר: לבדוק ש:

$$f_1'(-1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = f_2'(-1)$$

כי אז קיים הגבול. $f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$

כלו' f גזירה גם ב- $x = -1$.

אכן: מכיוון ש: $1 \leq n-1$ נקבל לפי $(*)$:

$f_1'(-1) = f_2'(-1) = 0$, כנדרש.