תרגיל 11 ־ אלגברה לינארית למורים

4 בפברואר 2017

שאלה 1

חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה הבאה:

$$A=\begin{pmatrix}12 & 0 & 14\\ 0 & 3 & 3\\ 4 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

פתרון:

$$det\left(A\right)=12\cdot\begin{vmatrix}3 & 3\\ 0 & 5\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}0 & 3\\ 4 & 5\end{vmatrix}+14\begin{vmatrix}0 & 3\\ 4 & 0\end{vmatrix}=12\cdot15+14\cdot\left(-12\right)$$

שאלה 2

חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 0 & 1 & -9\\ -2 & 0 & 4 & 0 & 2 & -1\\ 9 & 0 & 6 & 0 & 5 & 2\\ -2 & 4 & -2 & 3 & 5 & -6\\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

רמז:

אין צורך להתחיל לפתח סתם לפי אחת בנוסחאות ולקבל 720 מחוברים, חשבו היטב באיזה סדר ולפי מה כדאי לפתח.

פתרון:

נעשה פיתוח לפי שורה האחרונה ונקבל:

$$det\left(A\right)=5\cdot\begin{vmatrix}3 & -2 & 0 & 1 & -9\\ 0 & 4 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 6 & 0 & 5 & 2\\ 4 & -2 & 3 & 5 & -6\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

שוב נעשב פיתוח לפי השורה האחרונה:

$$det\left(A\right)=5\cdot\left(-1\right)\cdot\begin{vmatrix}3 & 0 & 1 & -9\\ 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 5 & 2\\ 4 & 3 & 5 & -6\end{vmatrix}$$

נעשה פיתוח לפי העמודה השנייה ונקבל:

$$det\left(A\right)=-5\cdot\left(-3\right)\begin{vmatrix}3 & 1 & -9\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 5 & 2\end{vmatrix}=15\cdot3\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 5 & 2\end{vmatrix}=45\left(4+5\right)=45\cdot9$$

תרגיל 3

חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה הבאה באמצעות פעולות הדירוג:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 9 & -4\\ 1 & 0 & 3 & -2\\ 0 & 5 & 6 & 0\end{pmatrix}$$

הדרכה:

נזכור כיצד פעולות שורה משפיעות על הדטרמיננטה:

1) החלפת שתי שורות כופלת את הדטרמיננטה במינוס אחד.

2) חיבור שורה אחת כפול קבוע לשורה אחרת אינה משנה את הדטרמיננטה כלל.

3) כפל שורה בקבוע כופל את הדטרימינאה בקבוע זה.

דרגו את המטריצה A באמעות פעולות 1 ו 2 בלבד(כלומר, ללא כפל שורה בקבוע).

שימו לב: אין צורך להגיע לדירוג קנוני, אלא רק למטריצה משולשית.

רשמו לפניכם מספר הפעמים שביצעתם את פעולה 1, כלומר החלפתם שורות.

שימו לב 2- דירוג באמצעות מחשבוני אינטרנט לא יזור לכם כאן.

רשמו את המטריצה המדורגת אשר קיבלתם.

דטרמיננטה של מטריצה משולשית היא מכפלת איבר האלגסון לכן הדטרמיננוה של המטריצה מדורגת שמתתם הינה:

(**רשמו את המטריצה**)

סה"כ הדטרימיננטה של המטריצה המקורית הינה מונוס אחד בחזקת כמות החלפות השורה כפול הדטרמיננטה של המטריצה המדורגת:

$|A| = (?)$

פתרון:

לאחר דירוג של A נקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

בנוסף תוך כדי הדירוג פעם אחת הכפלנו ב 1־ את השורה הראשונה, ופעמיים החלפנו בין השורות, ולכן את הדטרמיננטה של מטריצה מדורגת נכפול ב־$-1 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$

ולכן $det\,(A) = -1 \cdot (-90) = 90$

תרגיל 4

נתון כי $|B| = 1$ עבור המטריצה

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 2 \cdot b & (4 \cdot c - a) & c \\ 2 \cdot e & (4 \cdot f - d) & f \\ 2 \cdot y & 4 \cdot z - x & z \end{pmatrix}$$

רמז:

הגיעו מהמטריצה A אל המטריצה B על ידי פעולות שורה /עמודה/או שחלוף.

זכרו שפעולו עמודה משפיעות כמו פעולו שורה על הדטרמיננטה, וכי הדטרמיננוה של המטריצה המשוחלפת שווה לדטרמיננטה של המטריצה המקורית.

נחליף בין העמודה הראשונה לשנייה ב־A ונזכור שנצטרך בסוף לכפול את הדטרמיננה ב־$1-$ונקבל:

$$\begin{pmatrix} (4\cdot c-a) & 2\cdot b & c \\ (4\cdot f-d) & 2\cdot e & f \\ (4\cdot z-x) & 2\cdot y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot c & b & 0 \\ 4\cdot f & e & 0 \\ 4\cdot z & y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & b & c \\ -d & e & f \\ -x & y & z \end{pmatrix}$$

ולכן $|A| = -\begin{vmatrix} (4\cdot c-a) & 2\cdot b & c \\ (4\cdot f-d) & 2\cdot e & f \\ (4\cdot z-x) & 2\cdot y & z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4\cdot c & b & 0 \\ 4\cdot f & e & 0 \\ 4\cdot z & y & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -a & b & c \\ -d & e & f \\ -x & y & z \end{vmatrix} =$

$$0 + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix} = 1$$

הדטרמיננטה של מטריצה ראשונה אחרי השוויון השני מתאפסת כי יש במטריצה שורת אפסים.

תרגיל 5

יהיו $a = (2,3,-1)$, $b = (0,4,0.5)$, $c = (6,1,-4)$

א) חשב את הזווית בין a ל־b.

פתרון:

נחשב לפי הנוסחה: $cos\left(\theta\right) = \frac{<a,b>}{\|a\|\cdot\|b\|}$

$< a,b >= 2\cdot 0 + 3\cdot 4 - 0.5 = 11.5$

$\|a\| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$

$\|b\| = \sqrt{16+0.25} = \sqrt{16.25}$

ולכן $cos\left(\theta\right) = \frac{11.5}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{16.25}}$

ולכן $\theta = arccos\left(\frac{11.5}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{16.25}}\right)$

ב) חשב את שטח המקבילית המוצרת ע"י c ו־b.

פתרון:

שטח המקבילית הוא $\|b\times c\|$

$$b\times c=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ 0 & 4 & 0.5\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix} 4 & 0.5\\ 3 & -1\end{vmatrix},-\begin{vmatrix} 0 & 0.5\\ 2 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix} 0 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix}\right)=(-5.5,1,-8)$$

$$\|b\times c\|=\sqrt{(5.5)^2+65}$$

ג) הראה ש־a,b,c נמצאים באותו מישור.

פתרון:

כדי להראות ששלושת הווקטורים נמצאים באותו מישור נחשב את המכפלה המעורבת ונראה שהיא מתאפסת:

$$.< a,b\times c >=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1\\ 0 & 4 & 0.5\\ 6 & 1 & -4\end{vmatrix}=4\cdot\begin{vmatrix} 4 & 0.5\\ 1 & -4\end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0.5\\ 0 & -4\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 0 & 4\\ 6 & 1\end{vmatrix}=0$$

תרגיל 6

יהיו a,b שני ווקטורים אורתונורמליים ב־$\mathbb{R}^3$, הראה ש:

הווקטורים $a,b,a\times b$ מהווים קבוצה אורתומורמלית ב־$\mathbb{R}^3$ והסיקו מזה שהם בסיס.

פתרון:

אורתוגונאליות:

$< a,a\times b >=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=0$ משום שיש במטריצה שתי שורות זהות זו לזו.

$$< b,a\times b >=\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=0$$

ולכן זו קבוצה אורתוגונאלית

אורתונורמליות:

נשתמש בנוסחה הבאה : $\|a\times b\|=\|a\|\cdot\|b\|\cdot sin\,(\theta)$ כאשר θ היא זווית בין a ל־b.

לפי הנתון $a\perp b$ אזי $\theta=\frac{\pi}{2}$ ולכן $\|a\times b\|=\|a\|\cdot\|b\|\cdot sin\left(\frac{\theta}{2}\right)=1\cdot1\cdot1=1$

ולכן זו קבוצה אורתונורמלית ולכן היא בת"ל ולכן מהווה בסיס ל־$\mathbb{R}^3$.

תרגיל 7

חשבו את נפח המקבילון שצלעותיו הן:

$u = (1, 2, 3)$, $v = (2, 1, 0)$, $w = (4, 0, -3)$

פתרון:

נפח המקבילון הוא $|< u, v \times w >|$ ולכן נחשב את המכפלה המעורבת:

$$< u, v\times w >= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} - 2\cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 3\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -9$$

ולכן נפח המקבילית שווה: $|< u, v \times w >| = 9$

תרגיל 8

הוכח:

$u \cdot (v \times w) = w \cdot (u \times v) = v \cdot (w \times u)$

פתרון:

$$< u, v\times w >= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} =< w, u \times v >$$

$$< w, u\times v >= \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} =< v, w \times u >$$