תרגיל בית 6 אינפי 3

1. משטח נתון על ידי המשוואה $z = e^{-x^2-2y^2}$.

(א) מצאו $P = (x_0, y_0, z_0)$ נקודה על המשטח, כך שאם יניחו עליה כדור, הוא יתחיל לנוע בכיוון $(2, 1, a)$ עבור a כלשהוא. מצאו גם את a.

פתרון. אנו יודעים שהכדור יתחיל לזוז לכיוון ההפוך לכיוון הגרדיאנט. היות ו

$$z = e^{-x^2-2y^2}$$

הגרדיאנט בנקודה (x_0, y_0) הוא

$$\nabla f(x_0, y_0) = (-2x_0e^{-x_0^2-2y_0^2}, -4y_0e^{-x_0^2-2y_0^2})$$

לכן הכדור יזוז לכיוון הנגדי כלומר:

$$(2x_0e^{-x_0^2-2y_0^2}, 4y_0e^{-x_0^2-2y_0^2})$$

אנו צריכים שכיוון זה יהיה בכיוון הוקטור $(2, 1)$ וזה למשל קורה כאשר $y_0 = 1 \quad x_0 = 4,$ (זה יקרה בשביל כל נקודה (x_0, y_0) שבה $x_0 = 4y_0$). רכיב z של נקודה זו הוא:

$$z = e^{-16-2} = e^{-18}$$

לכן נקודה מתאימה על המשטח תהיה

$$(4, 1, e^{-18})$$

או כל נקודה מהצורה:

$$(4t, t, e^{-18t^2})$$

נותר לברר לאיזה כיוון ב $\mathbb{R}^3$ הכדור יפנה. הגרדיאנט של המשטח $z - e^{-x^2-2y^2}$ הוא

$$(-2x_0e^{-x_0^2-2y_0^2}, -4y_0e^{-x_0^2-2y_0^2}, -1)$$

ובנקודה $(4t, t, e^{-18t^2})$ הוא שווה ל

$$(-8te^{-18t^2}, -4te^{-18t^2}, -1)$$

אנחנו צריכים ש $(2, 1, a)$ יהיה ניצב אליו. כלומר

$$-16te^{-18t^2} - 4te^{-18t^2} - a = 0$$

ולכן

$$a = -20te^{-18t^2}$$

למשל עבור הנקודה שבחרנו שבה $t = 1$ נקבל $a = -20e^{-18}$.

(ב) מצאו נקודה על המשטח שאם יניחו עליה את הכדור הוא לא יזוז לשום מקום.

זה כמובן יקרה כאשר הגרדיאנט יהיה 0 וזה קורה במקרה שלנו כאשר $z_0 = 1 \quad y_0 = 0 \quad x_0 = 0$.

2. תהי $f(u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית בכל המישור $\mathbb{R}^2$. נתון

$$\frac{\partial f}{\partial u}(7, 1) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial v}(7, 1) = 3$$

. נגדיר:

$$u(x,y) = 2x + 3y \quad v(x,y) = x - y$$

$$z(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$$

חשב את $\frac{\partial z}{\partial x}(2,1)$ ואת $\frac{\partial z}{\partial y}(2,1)$.

פתרון. שימוש פשוט בכלל השרשרת מראה ש

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2,1) = \frac{\partial f}{\partial u}(7,1)\frac{\partial u}{\partial x}(2,1) + \frac{\partial f}{\partial v}(7,1)\frac{\partial v}{\partial x}(2,1) = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(2,1) = \frac{\partial f}{\partial u}(7,1)\frac{\partial u}{\partial y}(2,1) + \frac{\partial f}{\partial v}(7,1)\frac{\partial v}{\partial y}(2,1) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) = 3$$

3. תהי $f(x,y)$ פונקציה בעלת נגזרות חלקיות רציפות בקבוצה $D = \{(x,y) \mid x > 0, y > 0\}$. נתון כי קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש

$$xf'_x + yf'_y = nf$$

לכל $(x,y) \in D$. הוכיחו כי

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y)$$

לכל $t > 0$ ו $(x,y) \in D$.

הדרכה: הגדירו

$$F(t) = \frac{f(tx,ty)}{t^n}$$

והוכיחו כי F קבועה.

פתרון. נגזור את F לפי t

$$F'(t) = \frac{(f'_x(tx,ty) \cdot x + f'_y(tx,ty) \cdot y)t^n - nt^{n-1}f(tx,ty)}{t^{2n}}$$

לפי הנתון

$$f'_x(x,y) \cdot x + f'_y(x,y) \cdot y = nf(x,y)$$

ולכן

$$f'_x(tx,ty) \cdot tx + f'_y(tx,ty) \cdot ty = nf(tx,ty)$$

כלומר

$$f'_x(tx,ty) \cdot x + f'_y(tx,ty) \cdot y = \frac{n}{t}f(tx,ty)$$

אם נציב זאת בביטוי שקיבלנו קודם נקבל

$$F'(t) = \frac{(\frac{n}{t}f(tx,ty))t^n - nt^{n-1}f(tx,ty)}{t^{2n}} = 0$$

כלומר

$$F(t) = c$$

בפרט

$$F(t) = F(1)$$

כלומר

$$\frac{f(tx,ty)}{t^n} = f(x,y)$$

ולכן

$$f(tx,ty)=tf(x,y)$$

כנדרש.

4. נתונה פונקציה

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

מצא את $f''_{xy}(0,0)$ ואת $f''_{yx}(0,0)$.

פתרון. ראשית, ברור כי

$$f'_y(0,0)=f'_x(0,0)=0$$

נמצא גם את ערך הנגזרות החלקיות במקומות נוספים:

$$f'_x(x,y)=y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

לכן ברור כי

$$f'_x(0,y)=-y$$

והנגזרת החלקית השניה היא

$$f'_y(x,y)=x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\frac{-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

לכן

$$f'_y(x,0)=x$$

כעת נחשב את הנגזרות המעורבות ונקבל:

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f_x(0,t)-f_x(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-t}{t}=-1$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f_y(t,0)-f_y(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{t}=1$$

הנגזרות המעורבות קיימות אבל לא שוות.

5. תהי $f(x,y)$ פונקציה גזירה ברציפות פעמיים בתחום $D=(0,\infty)\times(0,\infty)$. ונניח ש x,y מבוטאים באמצעות s,t לפי $x=e^{s+t},\quad y=e^{s-t}$ כך שניתן להגדיר הרכבה

$$g(s,t)=f(x(s,t),y(s,t))$$

הוכח כי

$$g_{st}=0\Leftrightarrow x^2f_{xx}+xf_x=y^2f_{yy}+yf_y$$

פתרון. נבצע החלפת משתנים: נתחיל עם g_s

$$g_s=f_xx_s+f_yy_s$$

עכשיו

$$\frac{\partial}{\partial t}(g_s) = \frac{\partial}{\partial t}(f_x x_s + f_y y_s) = \frac{\partial}{\partial t}(f_x)x_s + f_x x_{st} + \frac{\partial}{\partial t}(f_y)y_s + f_y y_{st} =$$
$$(f_{xx}x_t + f_{xy}y_t)x_s + f_x x_{st} + (f_{yx}x_t + f_{yy}y_t)y_s + f_y y_{st} =$$
$$f_{xx}x_t x_s + f_{xy}y_t x_s + f_x x_{st} + f_{yx}x_t y_s + f_{yy}y_t y_s + f_y y_{st}$$

במקרה שלנו

$$x_s = x_t = e^{s+t} = x$$

$$x_{ts} = e^{s+t} = x$$

$$y_s = e^{s-t} = x$$

$$y_t = -e^{s-t} = -y$$

$$y_{st} = -e^{s-t} = -y$$

אם נציב את כל אלה בביטוי שלנו נקבל ש

$$g_{st} = f_{xx}x^2 - f_{xy}xy + f_x x + f_{yx}xy - f_{yy}y^2 - f_y y =$$
$$f_{xx}x^2 + f_x x - f_{yy}y^2 - f_y y$$

לכן ברור ש

$$g_{st} = 0 \Leftrightarrow x^2 f_{xx} + x u_x = y^2 f_{yy} + y f_y$$

6. פתרו את הבאים:

(א) מצאו את פולינום טיילור סביב הנקודה $(0,0)$ עד סדר 5 של $f(x,y) = e^{x^2} sin(2y)$

פתרון. היות ו

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

נקבל כי

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^5)$$

בדומה:

$$\sin 2y = 2y - \frac{(2y)^3}{3!} + \frac{(2y)^5}{5!} + o(y^5)$$

ולכן:

$$e^{x^2} sin(2y) = (1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(|x|^5))(2y - \frac{(2y)^3}{3!} + \frac{(2y)^5}{5!} + o(|y|^5)) =$$
$$2y + 2x^2 y + x^4 y - \frac{4}{3}y^3 - \frac{4}{3}x^2 y^3 + \frac{(2y)^5}{5!} + o(||(x,y)||^5)$$

(ב) יהיו $a,b \in \mathbb{R}$, כתבו מחדש את הפולינום $x^3 + xy + y^2$ כך שהוא יהיה פולינום של $x-a, \quad y-b$.

פתרון. נחשב טור טיילור עד סדר 3 סביב (a,b):

$$f_x = 3x^2 + y, \quad f_y = x + 2y$$

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = 1, \quad f_{yy} = 2$$

$$f_{xxx}=6, \quad f_{xxy}=f_{xyy}=f_{yyy}=0$$

נציב את (a,b) ונקבל:

$$f(a,b)=a^3+ab+b^2$$

$$f_x(a,b)=3a^2+b, \quad f_y(a,b)=a+2b$$

$$f_{xx}(a,b)=6a, \quad f_{xy}(a,b)=1, \quad f_{yy}(a,b)=2$$

$$f_{xxx}(a,b)=6, \quad f_{xxy}(a,b)=f_{xyy}(a,b)=f_{yyy}(a,b)=0$$

ולכן טור טיילור הוא

$$a^3+ab+b^2+(3a^2+b)(x-a)+(a+2b)(y-b)+\frac{1}{2}(6a(x-a)^2+2(x-a)(y-b)+2(y-b)^2)+$$
$$+\frac{1}{3!}(6(x-a)^3)$$

שזה בכתיבה קצת יותר יפה:

$$a^3+ab+b^2+(3a^2+b)(x-a)+(a+2b)(y-b)+3a(x-a)^2+(x-a)(y-b)+(y-b)^2+(x-a)^3$$

(ג) כתבו את פיתוח טיילור של $f(x,y)=sin(xe^y)$ סביב הנקודה $(\frac{\pi}{2},0)$ עד סדר 2.

פתרון. נחשב נגזרות עד סדר 2:

$$f_x=\cos(xe^y)e^y, \quad f_y=\cos(xe^y)xe^y$$

$$f_{xx}=-e^{2y}\sin(xe^y), \quad f_{xy}=-\sin(xe^y)xe^{2y}+\cos(xe^y)e^y, \quad f_{yy}=xe^y\cos(xe^y)-\sin(xe^y)x^2e^{2y}$$

נציב את הנקודה $(\frac{\pi}{2},0)$ ונקבל:

$$f(\frac{\pi}{2},0)=1$$

$$f_x(\frac{\pi}{2},0)=0, \quad f_y(\frac{\pi}{2},0)=0$$

$$f_{xx}(\frac{\pi}{2},0)=-1, \quad f_{xy}(\frac{\pi}{2},0)=-\frac{\pi}{2}, \quad f_{yy}(\frac{\pi}{2},0)=-\frac{\pi^2}{4}$$

לכן הפולינום עד סדר 2 עם שארית פיאנו הוא:

$$f(x,y)=1+\frac{1}{2}(-(x-\frac{\pi}{2})^2-\frac{\pi}{2}(x-\frac{\pi}{2})y-\frac{\pi^2}{4}y^2)+o(||(x,y)||^2)$$

7. תהי $f(x,y)=e^{x^2y^3}$.

(א) כתבו פיתוח טיילור של f סביב $(0,0)$ עד סדר 19.

פתרון. היות ו

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

נקבל ש

$$e^{x^2y^3}=1+x^2y^3+\frac{x^4y^6}{2}+\frac{x^6y^9}{6}+o(||x,y||^{19})$$

(נשים לב ש x^8y^{12} הוא כבר איבר ממעלה 20).

(ב) חשבו את $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x^8\partial^{11}}$

פתרון. היות ואין בפיתוח טיילור אף איבר מסדר 19 ברור ש

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x^8\partial^{11}}=0$$